Cálculo Numérico

João Carlos dos Santos
Gabriela Faria Barcelos Gibim

Presidente: Rodrigo Galindo
Vice-Presidente Acadêmico de Graduação: Rui Fava
Gerente Sênior de Editoração e Disponibilização de Material Didático: Emanuel Santana
Gerente de Revisão: Cristiane Lisandra Danna
Coordenação de Produção: André Augusto de Andrade Ramos
Coordenação de Disponibilização: Daniel Roggeri Rosa
Editoração e Diagramação: eGTB Editora

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Santos, João Carlos dos
S237c Cálculo numérico / João Carlos dos Santos, Gabriela Faria Barcelos Gibim. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2015.
232 p.

ISBN 978-85-8482-228-7

1. Cálculos numéricos. I. Gibim, Gabriela Faria Barcelos. II. Título.

CDD 518

2015
Editora e Distribuidora Educacional S.A
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 — Londrina — PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: http://www.kroton.com.br/

Sumário

Palavras do autor

Olá, aluno, bem-vindo.

Nesta unidade curricular, você será apresentado aos principais tópicos de cálculo numérico, tais como: os conceitos de erros, raízes, interpolação e integração.

O seu material é composto pelo livro didático, que apresenta os principais temas que deverão ser estudados. Além desse, você também pode contar com a orientação das atividades apresentadas nas *webaulas* e, ainda, os momentos de orientação, mediação, explicação e interação que ocorrem no decorrer das aulas. Participe ativamente das atividades. A estrutura de seu livro didático contempla quatro(quatro) unidades de ensino. São elas:

- **Erros**: apresenta conversão de números inteiros e fracionários decimais para binários, aritmética de ponto flutuante e análise de erros.
- **Raízes**: método da bisseção, falsa posição, interativo linear e Newton-Raphson.
- **Interpolação**: interpolação polinomial, forma de Lagrange, Newton e estudo de erro na interpolação
- **Integração**: fórmulas de Newton-Cotes, regra dos trapézios, regra de Simpson, estudo dos erros na integração numérica.

Prezado estudante, mantenha uma rotina de estudos que possibilite dedicação aos processos de leitura, participação e realização das atividades propostas. Isso tem extrema importância para que você obtenha sucesso tanto em construção e desenvolvimento de aprendizagem, quanto em sua aplicação. Desde já desejo a você bons estudos.

ERROS

Convite ao Estudo

Por que estudar cálculo numérico?

O estudo do cálculo numérico é fundamental para resolver adequadamente problemas que exigem cálculos matemáticos e que são realizados no computador. Existem números que são representados por infinitos dígitos e, no computador, não podem ser registrados pois a máquina é limitada. Então são usados recursos como o arredondamento e o truncamento. Contudo, é preciso cuidado para que essas estratégias não produzam erros que comprometerão o resultado final dos cálculos efetuados.

Desse modo, nesta unidade de ensino, enfatizaremos o estudo de erros; apresentaremos a conversão de números inteiros e fracionários decimais em binários, aritmética de ponto flutuante, análise de erros nas operações aritméticas e análise de erros de ponto flutuante. Aproveite a oportunidade e tenha bons estudos.

Com base nesse estudo, você irá conhecer o cálculo numérico, além de interpretar erros e conhecer as formas para calcular zeros de funções, interpolação e integração. Os objetivos desse estudo são: proporcionar-lhe uma formação básica nas técnicas elementares de cálculo numérico e fornecer condições para que você possa conhecer, calcular, utilizar e aplicar métodos numéricos na solução de problemas.

Para auxiliar no desenvolvimento da competência acima e atender aos objetivos do tema em questão (cálculo numérico), a seguir é apresentada uma situação hipotética que visa aproximar os conteúdos teóricos com a prática.

"Carlos é coordenador de Engenharia de uma empresa de médio porte em São Paulo. Sua função é coordenar a equipe de técnicos (eletricistas, mecânicos, produção e civil) da empresa. Em seu dia a dia profissional, aparecem várias situações relacionadas ao cálculo numérico, em cuja solução Carlos deve auxiliar."

Imagine que você esteja no lugar de Carlos e que o laboratório de engenharia compra uma máquina de calcular, capaz de armazenar 4 dígitos na mantissa (parte decimal de um número) utilizando arredondamento. Então, os técnicos do laboratório, em cuja solução Carlos deve auxiliar em algumas dúvidas relacionadas à nova máquina que chegou e na resolução de algumas situações ligadas a ela.

Seção 1.1

Conversão de números inteiros e fracionários decimais para binários

Diálogo aberto

Para que converter números decimais em binários e vice-versa?

Veja a importância de compreender os fundamentos do estudo de conversão de números binários que iniciará nesta seção. Aproveite a oportunidade e faça bons estudos.

Dica

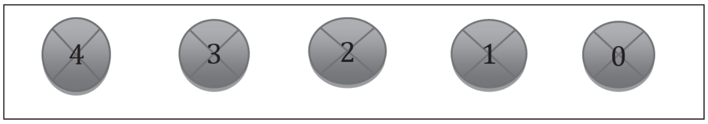
Você pode encontrar mais sobre o estudo de conversão de números inteiros e fracionários para binários no *link*: <http://www2.sorocaba.unesp.br/professor/luiza/CNC/apostila.pdf>. Acesso em: 9 jul. 2015.

Lembre-se

Você sabia que nem todas as propriedades básicas da aritmética valem quando executadas no computador? Na matemática, os números são representados por infinitos algarismos, já no computador isso não ocorre, pois a memória é finita. Temos como exemplo π e $\sqrt{3}$.

Vamos voltar à situação hipotética apresentada no convite ao estudo? Uma das situações-problema apresentadas pelos técnicos a Carlos foi a seguinte:

Uma máquina foi adquirida para executar o acionamento das lâmpadas do laboratório de engenharia, posicionadas em acordo com a disposição binária. Assim, os técnicos foram instruídos a acioná-las inserindo na máquina um algarismo decimal, que será convertido por ela em um código binário, fazendo assim o correspondente acionamento. Os técnicos ainda tinham dúvidas sobre qual número deveriam inserir para acionar determinada lâmpada e solicitaram a ajuda de Carlos. Considerando a disposição fixa das lâmpadas, conforme figura abaixo, qual código decimal Carlos (você) terá que inserir para que apenas a lâmpada "4" acenda? Considere a lâmpada "0" representando o algarismo menos significativo do número binário, a lâmpada "1", o segundo menos significativo, e assim sucessivamente.



Reflita

O que eu preciso para ser capaz de resolver a situação-problema?

Você deve saber realizar a mudança de base de binário para decimal.

Não pode faltar

Se calcularmos a área de uma circunferência de raio 100 m, obteremos os resultados:

I) A= 31400 m^2

II) A= 31416 m^2

III) A= 31415,92654 m^2

Como podemos justificar os diferentes resultados?

O erro ocorrido no problema acima depende de como a máquina utilizada representa os números, assim como da quantidade de algarismos utilizados.

Lembre-se

A área da circunferência é calculada por $A=\pi.r^2$. Assim, dependendo do valor utilizado para aproximar π, podemos ter valores diferentes para a área.

O número π foi representado de formas diferentes, percebemos assim que isso levou a resultados de áreas diferentes. Desse modo, o erro depende da aproximação escolhida para o número que possui uma representação infinita. Pelo fato de π ser um número irracional, a área da circunferência não será exata quando calculada em uma máquina.

Assimile

Você sabia que um número pode ser representado de forma finita em uma base e de forma não finita em outras bases? Na Antiguidade, foram utilizadas outras bases, como a base 12 e a base 60. Já o computador opera com a base binária, que utiliza apenas 2 dígitos, ou com a hexadecimal, que utiliza 16 dígitos.

Para que o computador execute as funções esperadas, é necessário que as instruções estejam organizadas de forma sistemática de acordo com a estrutura do sistema computacional. Isso significa que as instruções passadas ao computador o orientam a realizar algum tipo de operação sobre os valores que podem ser numéricos, alfabéticos ou lógicos.

Reflita

Como ocorre a análise dos dados informados pelo usuário no computador?

O usuário envia os dados na base 10 para o computador que converte essas informações para o sistema binário, assim como suas operações. Depois, esses números são convertidos novamente para o sistema decimal e transmitidos aos usuários.

Desse modo, toda linguagem de programação usada para escrever um programa computacional precisará ser convertida num outro programa equivalente à linguagem da máquina.

Sistema de Numeração

Um sistema de numeração é uma forma lógica adotada para representar simbolicamente quantidades numéricas. De forma geral, um número pode ser escrito numa base qualquer “b” como exemplificado a seguir: $a_{n\ .}\ b^n + a_{(n-1)}.b^{(n-1)}+...+a_1.b^1+a_{0\ .}\ b^0$

Sendo:

- a= algarismo
- (n+1)= posição que o algarismo ocupa, n= 0,1,2,.....;
- b=base do sistema de notação

Utilizando essa representação, pode-se realizar a conversão de qualquer número para o sistema decimal.

Sistema de numeração decimal

Nesse sistema, usamos dez dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, sendo 9 o maior deles. Em um sistema numérico com base b, existem b dígitos, e o maior é b-1.

Sistema de numeração binário

Neste sistema, existem 2 dígitos apenas: o zero (0), que se convencionou como "desligado" e o um (1) que se convencionou como "ligado". Cada dígito representado nesse sistema é denominado bit (contração de Binary digiT).

Conversão do sistema binário para decimal

Ao escrever o número na base 2 (sistema binário), os dígitos representam os coeficientes de potências de 2. A representação do número $(a_j a_{j-1......} a_2 a_1 a_0)_2$ na base 10, denotada por b_0, é obtida através do processo:

$$\boxed{\begin{array}{c} b_{j\,=}\ a_j \\ b_{j-1=}\ a_{j-1} + 2b_j \\ \vdots \qquad \vdots \\ b_{1\,=}\ a_1 + 2b_2 \\ b_{0\,=}\ a_0 + 2b_1 \end{array}}$$

Exemplificando

Por exemplo, o número decimal 11 é escrito em representação binária como 1011, pois para $(1011)_2$, a sequência obtida será:

$b_3 = a_3 = 1$

$b_2 = a_2 + 2b_3 = 0 + 2 \times 1 = 2$

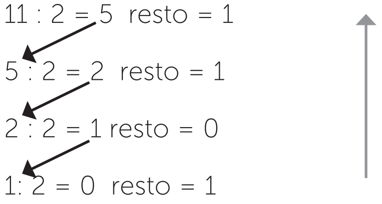
$b_1 = a_1 + 2b_2 = 1 + 2 \times 2 = 5$

$b_0 = a_0 + 2b_1 = 1 + 2 \times 5 = 11$

Esse exemplo mostra que 1011_2 é o mesmo que $11_{10.}$

Exemplificando

Agora observe como funciona o processo inverso, ou seja, como encontrar o equivalente binário de 11_{10}.



11 : 2 = 5 resto = 1

5 : 2 = 2 resto = 1

2 : 2 = 1 resto = 0

1: 2 = 0 resto = 1

O número binário é composto pelos restos das divisões, sendo que o primeiro dígito binário é o último resto encontrado e o último dígito binário é o primeiro resto da divisão, conforme indica o sentido da seta maior à direita. Logo $11_{10} = 1011_2$.

Conversão de números binários fracionários em decimais

A conversão de binário para decimal é realizada da seguinte forma:

1	1	0	,	1	1	0	0	1
↓	↓	↓		↓	↓	↓	↓	↓
2^2	2^1	2^0		2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}
1×4	1×2	0×1		$1 \times 0{,}5$	$1 \times 0{,}25$	$0 \times 0{,}125$	$0 \times 0{,}0625$	$1 \times 0{,}03125$
4 +	2 +	0 +		0,5 +	0,25 +	0 +	0 +	0,03125

Logo: $110{,}11001_2 = 6{,}78125_{10}$

Devemos multiplicar cada algarismo do número na base 2, após o ponto, por potências decrescentes de 2, da esquerda para a direita, e somar as parcelas.

Exemplificando

$$0{,}110_2 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 = 0{,}75$$

Conversão de números decimais fracionários em binários

Volte ao exemplo anterior e veja que $110{,}11001_2 = 6{,}78125_{10}$. Agora observe como funciona o processo inverso, ou seja, como encontrar o equivalente binário de $6{,}78125_{10}$. Para isso, será necessário decompor o número na parte inteira e fracionária: 6 + 0,78125. Já foi mostrado como encontrar o binário de um número decimal inteiro, por meio de divisões sucessivas por 2, considerando o resto como número binário. A parte fracionária do número decimal será transformada em binário pela multiplicação sucessiva por 2. Quando o resultado dessa multiplicação fornecer na parte inteira do número “0” ou “1”, eles são colocados à direita da fração binária. Quando for “1”, esse número é subtraído do número decimal fracionário para que seja novamente multiplicado por 2. Esse processo se repete até finalizar com zero.

6 + 0,78125

Conversão da parte inteira do número decimal:

6 : 2 = 3 resto = 0

3 : 2 = 1 resto = 1

1 : 2 = 0 resto = 1

Logo $6_{10} = 110_2$.

Conversão da parte fracionária do número decimal:

0,78125 × 2 = 1,5625 ⟶ “1” à direita na parte fracionária do binário

Subtrai a unidade usada.

0,5625 × 2 = 1,125 ⟶ “1” à direita na parte fracionária do binário

0,125 × 2 = 0,25 ⟶ “0” à direita na parte fracionária do binário

Mantém o número.

0,25 × 2 = 0,5 ⟶ “0” à direita na parte fracionária do binário

Mantém o número.

0,5 × 2 = 1,0 → "1" à direita na parte fracionária do binário

Subtrai a unidade usada.

0,0 → Fim do processo. Nesse ponto, não é usado mais dígito algum.

Seguindo a ordem das multiplicações sucessivas, deve-se usar o primeiro dígito como primeiro dígito fracionário binário, conforme indica a seta mais à direita. Logo, $0{,}78125_{10} = 0{,}11001_2$, sendo o número final a soma das parcelas inteiras e fracionárias.

$6{,}0_{10} + 0{,}78125_{10} = 110_2 + 0{,}11001_2$

$6{,}78125_{10} = 110{,}11001_2$

Assim, deve-se multiplicar a parcela decimal por 2. Continue multiplicando a parte decimal do resultado obtido por 2. O número na base 2 será então obtido tomando-se a parte inteira do resultado de cada multiplicação.

Exemplificando

Assim, 0,75 × 2 = 1,50

0,50 × 2 = 1,00

0,00 × 2 = 0,00

Logo: $(0{,}75)_{10} = (0{,}11)_2$.

Podemos ver essa situação no exemplo a seguir. Para passar o número 3,8 da base 10 para a base 2 devemos transformar a parte inteira $3_{10} = 11_2$; e a parte decimal.

0,8 × 2 = 1,6

0,6 × 2 = 1,2

0,2 × 2 = 0,4

0,4 × 2 = 0,8

0,8 × 2 = ...

Logo: $(3{,}8)_{10} = (11{,}11001100\ .\ .\ .)_2$. Portanto, o número $(3{,}8)_{10}$ não terá representação binária finita.

Alguns números não terão representação finita no sistema binário, acarretando assim erros nos cálculos realizados nesse sistema. O computador irá registrar uma aproximação porque opera no sistema binário.

As operações com o número $(3,8)_{10}$ serão realizadas por aproximação.

Na próxima seção, estudaremos melhor o porquê de alguns resultados imprecisos nas operações.

Conversão de número hexadecimal para decimal

Outro sistema numérico importante para o estudo computacional é o hexadecimal, ou seja, base de 16 algarismos. Os algarismos que compõem esse sistema são todos os números da base decimal, acrescidos por letras até completar os 16 algarismos necessários. Logo, são usados: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, considerando que os correspondentes das letras em decimal são A = 10; B = 11; C = 12; D = 13; E = 14; F = 15.

Dígito de 256 (16^2)

Dígito de 16 (16^1)

Dígito de 1 (16^0)

$A07 = A \times (16^2) + 0 \times (16^1) + 7 \times (16^0) = 10 \times 256 + 0 \times 16 + 7 \times 1 = 2567$

$A07_{16} = 2567_{10}$

Exemplificando

Conversão de número decimal para hexadecimal.

2567_{10} para base 16

2567 : 16 = 160 resto = 7

160 : 16 = 10 resto = 0

10 : 16 = 0 resto = 10 ou A

Logo $2567_{10} = A07_{16}$.

Pesquise mais

Existem muitas calculadoras que fazem a conversão entre bases numéricas. Neste *link*, há um *app*. para o sistema Android que realiza essa função. Disponível em: <http://www.androidz.com.br/forum/topic/984-app-conversor-de-base-numerica/>. Acesso em: 22 jun. 2015.

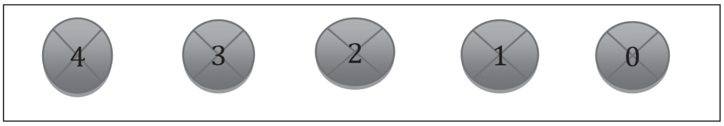
Faça você mesmo

Dado o número 110111 que está na base 10, escreva-o na base 2.

Sem Medo de Errar

Após o estudo de conversão de números inteiros e fracionários decimais para binários, vamos resolver a primeira situação-problema apresentada a Carlos?

Uma máquina foi adquirida para executar o acionamento das lâmpadas do laboratório de engenharia, as quais foram posicionadas em acordo com a disposição binária. Assim, os técnicos foram instruídos a acioná-las inserindo na máquina um algarismo decimal, que será convertido pela máquina em um código binário, fazendo assim o correspondente acionamento. Os técnicos ainda tinham dúvidas sobre qual número deveriam inserir para acionar determinada lâmpada e solicitaram a ajuda de Carlos. Considerando a disposição fixa das lâmpadas, conforme figura a seguir, qual código decimal Carlos (você) terá que inserir para que apenas a lâmpada 4 acenda? Considere a lâmpada "0" representando o algarismo menos significativo do número binário, a lâmpada "1", o segundo menos significativo, e assim sucessivamente.



Solução

Carlos deverá inserir o número decimal 16, pois $16_{10} = 10000_2$.

Sendo a lâmpada 4 o algarismo mais significativo, temos o número binário 10000.

Convertendo esse número para decimal: $1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 16$.

Assim, Carlos deverá inserir na máquina o decimal 16.

$10\ 000 = 2^4 \times 1 + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 0 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 0 = 16$, fazendo o processo inverso de decimal para binário.

16:2= 8 resto =0

8:2= 4 resto= 0

4:2=2 resto=0

2:2=1 resto=0

1:2=0 resto=1

Logo $16_{10} = 10000_2$.

Atenção!

Nem todos os números reais têm representação no sistema binário, sendo necessário arredondar ou truncar para o número mais próximo da máquina.

Lembre-se

Alguns números não terão representação finita no sistema binário, acarretando assim erros nos cálculos realizados nos sistemas binários. O computador irá registrar uma aproximação porque opera no sistema binário. Veja mais em: <http://www2.sorocaba.unesp.br/professor/luiza/CNC/apostila.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2015.

Avançando na Prática

Pratique mais
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que podem ser encontradas no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.

Conversão de números	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer o cálculo numérico
2. Objetivos de aprendizagem	Fornecer condições para conhecer e realizar cálculos de conversão de números decimais em binários.
3. Conteúdos relacionados	Conversão de número decimal para binário.
4. Descrição da SP	Se o sistema decimal é utilizado pelos seres humanos, o sistema binário constitui a base para a representação da informação nos computadores. Nesse contexto, um equipamento dispõe de dois *displays*; o primeiro que mostra números em formato decimal, o segundo em binário, havendo uma correspondência entre as representações. Se o *display* decimal mostra o número 250, o binário mostrará: a) 11111010 b) 11111110 c) 11110101 d) 10101111 e) 10111110
5. Resolução da SP	Resposta correta: A. Para encontrar o número na forma binária, é só dividir o número 250 por 2 até encontrar 0 no quociente. 250 : 2 = 125 resto = 0 125 : 2 = 62 resto = 1 62 : 2 = 31 resto = 0 31: 2 =15 resto = 1 15: 2 = 7 resto = 1 7: 2 = 3 resto = 1 3: 2 = 1 resto = 1 1:2 = 0 resto = 1

Faça valer a pena

1. Assinale a alternativa que apresenta a conversão correta de decimal para binário do número 215_{10}.

a) 101001001_2.

b) 10011100_2.

c) 111011001_2.

d) 1000101_2.

e) 11010111_2.

2. Avalie como verdadeiras (V) ou falsas (F) as afirmativas seguintes.

I) Sistema decimal é um sistema numérico com base 10 que contém os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. É o sistema menos utilizado.

II) Sistema binário é um sistema numérico com base 2 que contém os algarismos 0, 1. É o sistema utilizado pelos computadores.

III) Um sistema numérico importante para o estudo computacional é o hexadecimal, ou seja, de base 16. Isso porque também é de potência de 2 (assim como o octal que é de base 8).

IV) O fato de um número ter representação decimal finita não implica uma representação binária também infinita.

V) Ao converter o número decimal $0{,}78125_{10}$ em binário, encontramos que: $0{,}78125_{10} = 0{,}11001_2$.

Agora assinale a alternativa que contém a sequência correta de valores lógicos V e F das afirmativas anteriores.

a) F, V, V, V, V.

b) V, F, V, V, V.

c) V, F, F, V, V.

d) V, F, F, F, V.

e) F, F, V, V, F.

3. Sobre mudança de base, podemos afirmar que:

a) A maioria dos computadores trabalha na base β, em que β é um número inteiro ≤ 2.

b) Um mesmo número não pode ser representado em mais de uma base.

c) Para converter um número decimal para um número binário, devemos aplicar um método para a parte inteira (divisões sucessivas) e um método para a parte fracionária, se houver (multiplicação sucessivas).

d) O número 1101 da base 2, quando representado na base 10, é igual a 11.

e) O número 13 que está na base 10 pode ser representado na base 2 como 1101.

4. Dado o número 0,110 que está na base 2, a sua representação na base 10 é:

a) 75.

b) 0,75.

c) 0,075.

d) 0,16.

e) 16.

5. Dado o número 0,1875 que está na base 10, a sua representação na base 2 é:

a) 0,1101.

b) 0,0111.

c) 0,0001.

d) 0,0011.

e) 0,1000.

6. Foram apresentados os seguintes resultados para a área de uma circunferência de raio 100cm: a) 31400 cm^2; b) 31416 cm^2; c) 31415,92654 cm^2. Como justificar as diferenças entre os resultados? É possível obter exatamente essa área?

7. Faça a conversão dos seguintes números binários em decimais: 1100011_2, 101101_2, $1101110_{2.}$

Seção 1.2

Aritmética de ponto flutuante

Diálogo aberto

Na seção anterior, vimos que há um método padrão para gerar um número numa base “b” qualquer, mas concentramos nossos estudos nos números dos sistemas decimal e binário.

Nesta seção, você irá aprender sobre aritmética de ponto flutuante. Iremos estudar sobre a representação dos números num sistema computacional e como esta é limitada pela capacidade da máquina, motivo da utilização do truncamento ou arredondamento dos dados.

Dica

Veja o livro de cálculo numérico em português disponibilizado em <http://www.decom.ufop.br/bcc760/material_de_apoio/livros/livro_port.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2015.

Lembre-se

Alguns desastres que ocorreram são atribuídos a uma equivocada computação numérica, como o fracasso do míssil Patriot, em Dharan, Arábia Saudita, em 25 de fevereiro de 1991. Esse incidente, que resultou em 28 mortes, foi atribuído à má manipulação de erros de arredondamento. Outro caso foi a explosão do foguete Ariane 5, logo após a decolagem em sua viagem inaugural a partir da Guiana Francesa, em 4 de junho de 1996. Esse desastre acabou por ser a consequência de um estouro de memória (*overflow*). Os textos completos sobre os casos podem ser lidos em <http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters>. Acesso em: 13 jul. 2015.

Vamos voltar à situação hipotética apresentada no Convite ao Estudo? Uma das situações-problema apresentadas pelos técnicos a Carlos foi a seguinte:

A nova máquina adquirida possui um sistema de representação de números definido por base decimal, 4 dígitos na mantissa (parte decimal do número) e expoentes no intervalo [5,-5]. Os técnicos precisam saber quais são o menor e o maior números, em módulo, representados nesta máquina. Como eles podem resolver esse problema?

Reflita

O que eu preciso para ser capaz de resolver a situação-problema?

Conhecer e aplicar conhecimentos sobre aritmética de ponto flutuante.

Não pode faltar

Sistemas de números no computador

A quantidade de números reais existentes é infinita, e entre qualquer faixa de números temos outros infinitos números – podemos representar números infinitamente pequenos. Os computadores, por sua vez, são limitados, ou seja, só podem representar números de tamanho finito, elementos finitos, células e registradores de tamanho finito. O fato de os computadores só representarem números de tamanho finito acarreta um problema de precisão, e podem ocorrer erros tanto para indicar números, quanto para obter o resultado de operações aritméticas. É por problemas como esse que existem o ***overflow*** e o ***underflow***. Para melhor compreensão, suponha que um processador tenha capacidade para representar valores binários de 32 bits e que efetue uma multiplicação cujo resultado retorne um número que ocupe mais espaço que o disponível. Essa ocorrência é conhecida como estouro da representação ou *overflow*.

Vocabulário

Underflow: quando ocorre um resultado com valor abaixo do menor valor representável por uma específica quantidade de bits disponível numa dada máquina.

Overflow: é o estouro da representação, isto é, quando há a necessidade de armazenar uma quantidade maior de bits do que o espaço representável disponibilizado pelo sistema de computação.

Bit: (simplificação para dígito binário, "*Binary digit*" em inglês) é a menor unidade de informação que pode ser armazenada ou transmitida e que pode assumir somente dois valores: 0 ou 1, verdadeiro ou falso e assim por diante.

Num sistema computacional, os valores reais são armazenados em notação científica, que é aquela que permite escrever com menos algarismos números muito pequenos (com muitos zeros depois da vírgula) ou números muito grandes. Considere os exemplos a seguir. O número 0,0000005 é muito pequeno, mas possui muitos dígitos. Em notação científica, é representado por 5×10^{-7} e, em computação, por 5E-7, sendo que E é o indicador de que há o expoente -7. Observe que essa notação permite que o número seja "representado" corretamente com uma quantidade menor de algarismos (dígitos). A notação científica, como é conhecida em matemática, é chamada em computação de representação em ponto flutuante. Agora note que o número 5531222341112123 pode ser representado por $5{,}53 \times 10^{15}$ ou por 5,53E15 em ponto flutuante. Vamos aprender agora como os números são representados num computador.

Começaremos pela representação de um número inteiro.

Representação de um número inteiro

Não há dificuldade em representar um número inteiro no computador. Todo computador trabalha com uma base fixa b, onde b é um inteiro ≥ 2, e é escolhido como potência de 2.

Dado um número inteiro $n \neq 0$, ele possui a seguinte representação:

$n = \pm(n_{-k}n_{-k+1 \ldots\ldots}n_{-1}n_0) = \pm(n_0b^0+n_{-1}b^1+\ldots\ldots+n_{-k}b^k)$,

em que os n_i, $i=0,-1, \ldots, -k$ são inteiros satisfazendo $0 \leq n_i < b$ e $n_{-k} \neq 0$.

Exemplificando

Como o número 1885 é representado na base b=10 e armazenado?

$1885 = 5 \times 10^0 + 8 \times 10^1 + 8 \times 10^2 + 1 \times 10^3$

E é armazenado como $n_{-3}n_{-2}n_{-1}n_{0.}$

Representação de um número real

Você sabia que a representação de um número real no computador pode ser feita de duas maneiras?

I- Uma delas é a representação em ponto fixo: esse sistema foi usado no passado em muitos computadores. Assim, dado um número real, $x \neq 0$, ele será representado em ponto fixo por:

$$x = \pm \sum_{i=k}^{n} x_i b^{-i},$$

em que k e n são inteiros satisfazendo $k<n$ e, usualmente, $k \leq 0$ e $n>0$ e os x_i são inteiros satisfazendo $0 \leq x_i < b$.

Exemplificando

O número 2886,16 é representado na base b=10 por:

$$2886{,}15 = \sum_{i=-3}^{2} x_i b^{-i}$$

$$= 2 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

$$= 2 \times 1000 + 8 \times 100 + 8 \times 10 + 6 \times 1 + 1 \times 0{,}1 + 5 \times 0{,}01$$

Assim é armazenado como $x_{-3}x_{-2}x_{-1}x_0.x_1x_2$

A representação em ponto flutuante (poderia ser chamada, no Brasil, de vírgula flutuante, pois usamos a vírgula para separar a parte inteira da fracionária) é universalmente utilizada nos dias atuais.

II- Representação em ponto flutuante

Essa é a representação mais flexível, portanto é mais utilizada nos dias de hoje. Um número real, $x \neq 0$, pode ser representado em ponto flutuante por:

$$x = \pm(0.d_1 d_2 \ldots d_t) \times b^E,$$

em que:

b= a base em que o computador opera;

t= o número de dígitos na mantissa; $0 \leq d_j \leq (b-1)$, $j=1, \ldots, t$;

E= o expoente no intervalo [m, M]. Se $d_1 \neq 0$, diz-se que o sistema é normalizado (SPERANDIO; MENDES; SILVA, 2003).

Em qualquer computador, apenas um subconjunto dos números reais é representado exatamente. Assim, a representação de um número real será realizada através de truncamento ou de arredondamento.

O número máximo de dígitos *t* é determinado pelo comprimento da palavra do computador. Um "bit" é um dígito da mantissa quando a base é 2. Um número não poderá ser representado na máquina com sistema de aritmética de ponto flutuante se o expoente *E* estiver fora dos limites - *m* e *M*, pois a máquina acusará erro de *underflow*, se resultar $E <- m$, e de *overflow*, se $E > M$.

Exemplificando

Segue a representação de alguns números na base b = 10, em um ponto flutuante na forma normalizada.

i) $0{,}65 = (6 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}) \times 10^{0} = 0{,}65 \times 10^{0}$

ii) $-4{,}765 = -(4 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4}) \times 10^{1} = -0{,}4765 \times 10^{1}$

iii) $0{,}0145 = (1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}) \times 10^{-1} = 0{,}145 \times 10^{-1}$

iv) $4321{,}6 = (4 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 1 \times 10^{-4} + 6 \times 10^{-5}) \times 10^{4} = 0{,}43216 \times 10^{4}$

v) $0{,}0004 = (4 \times 10^{-1}) \times 10^{-3} = 0{,}4 \times 10^{-3}$

Representação de números no sistema F (b, t, m, M).

Para representarmos um sistema de números em ponto flutuante normalizado, na base b, com t dígitos significativos e com limites dos expoentes m e M, usa-se a notação: F (b, t, m, M).

Um número em F (b, t, m, M) será representado por:

$$\pm 0{,}d_1d_2 \ldots d_t \times b^E, \text{ em que } d_1 \neq 0 \text{ e } m \leq E \leq M$$

Exemplificando

Represente no sistema F(10,3,-2,2) os números do exemplo anterior. Nesse sistema, o número será representado por: $\pm 0{,}d_1d_2d_3 \times 10^E$, em que $-2 \leq E \leq 2$. Assim:

$0{,}65 = 0{,}65 \times 10^{0}$

$-4,765 = -0,4765 \times 10^1$

$0,0145 = 0,145 \times 10^{-1}$

Observe que os números 4321,6 e 0,0004 não podem ser representados no sistema.

Considerando o número $4321,6 = 0,43216 \times 10^4$, sendo o expoente maior que 2, o computador acusa ocorrência de *overflow*.

O número $0,0004 = 0,4 \times 10^{-3}$, sendo o expoente menor que – 2, representa uma situação em que o computador acusa a ocorrência de *underflow*.

Assimile

"O zero em ponto flutuante é, em geral, representado com o menor expoente possível na máquina. Isso porque a representação do zero por uma mantissa nula e um expoente qualquer para a base b pode acarretar perda de dígitos significativos no resultado da adição deste zero a outro número." (RUGGIERO; LOPES, 1996, p. 38).

Um computador que opera na base 10 com 4 dígitos na mantissa, para $x = 0,0000 \times 10^4$ e $y = 0,2125 \times 10^{-2}$, o resultado de x + y seria $0,21 \times 10^{-2}$, assim são perdidos dois dígitos do valor exato y. Isso ocorre pela forma como é efetuada a adição do ponto flutuante. Mas veremos esse assunto nas seções seguintes.

Reflita

Vejamos os sistemas de ponto flutuante de algumas máquinas antigas: HP 25, F(10,9,-98,100); Texas SR 50 e HP 41C, F(10,10,-98,100); Texas SR 52, F(10,12,-98,100); IBM 360/370, F(16,6,-64,63); Burroughs B 6700, F(8,13,-51,77). Comparando com sua calculadora ou seu microcomputador, essas máquinas podem ser ditas obsoletas no ponto de vista do sistema de ponto flutuante?

Propriedades dos números do sistema de ponto flutuante

i- $p = 0,1 \times b^m$ é o menor número não nulo, em módulo, em F;

ii- s = 0,(b-1)(b-1)...(b-1) × b^M é o maior número do sistema de ponto flutuante F;

iii- a cardinalidade (número de elementos) de F é:

Número de elementos = 2 · (b-1)b^{t-1}(E_{max} – E_{min} +1) + 1

iv- a mantissa está contida no intervalo [0,1; 1]

v- Se $x \in F$, então $-x \in F$.

Exemplificando

Considere F(2, 2,-1,2), com sistema normalizado, ou seja, $d_1 \neq 0$.

Quantos e quais os números são representados por esse computador?

Cardinalidade (número de elementos): 2·(b-1)b^{t-1}(E_{max} – E_{min} +1) + 1= 17 elementos (8 números positivos, 8 negativos e o zero).

±,10 x 2^E ou ±,11 x 2^E, sendo -1≤ E ≤ 2

Convertendo para decimal, temos:

0,10 = ½ e 0,11= ¾

Com isso, os únicos números positivos representáveis nesse computador são:

Mantissa: ½ × 2^E e ¾ × 2^E para e=-1,0,1 e 2.

Os números que podem ser representados na reta numérica são: ¼, ½, 1, 2, $^3/_8$, ¾, $^3/_2$ e 3. Também os números correspondentes negativos e o número zero.

Atenção!

O conjunto dos números de ponto flutuante é discreto e não contínuo como os números reais.

Não temos mais o conceito que entre dois números sempre existe outro.

Exemplo:

Considere a representação binária 0,6 e 0,7.

0,6= 0,100110011001 e 0,7= 0,1011001100110

Se representarmos esses números no sistema de aritmética flutuante F (2,2,-1,2), teremos:

0,6= 0,7= 0,10 x 2^0.

Veja que esse número equivale ao número 0,5 no sistema decimal, ou seja, o número 0,6 e 0,7 serão considerados 0,5 nesse sistema.

Dessa forma, pode-se concluir que nem todos os números reais têm representação no sistema binário, sendo necessário arredondar ou truncar para o número mais próximo da máquina. Vamos estudar mais sobre esse assunto na próxima seção.

Pesquise mais

Você pode encontrar mais sobre o estudo aritmético do ponto flutuante no *link*: <http://www2.sorocaba.unesp.br/professor/luiza/CNC/apostila.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2015.

Faça você mesmo

Represente o número 1997,16 em ponto fixo.

Sem Medo de Errar

Após o estudo do conteúdo de aritmética de ponto flutuante, vamos resolver a situação-problema apresentada a Carlos?

A nova máquina adquirida possui um sistema de representação de números definido por base decimal, 4 dígitos na mantissa (t=4), e expoentes no intervalo [-5,5]. Os técnicos precisam saber quais são o menor e o maior números, em módulo, representados nessa máquina. Como eles podem resolver esse problema?

Solução

O menor número não nulo, em módulo, de F é dado por:

p= 0,1 × b^m logo: sendo b=10 e m= -5 teremos:

$p=0{,}1000 \times 10^{-5} = 10^{-6}$

Para representar o maior número do sistema flutuante F, temos:

$s = 0{,}(b-1)(b-1)...(b-1) \times b^{M}$, logo:

$s= 0{,}(10-1)(10-1)(10-1)(10-1) \times 10^{5}$

$s= 0{,}9999 \times 10^{5} = 99990$

Atenção!

Nas máquinas digitais, um algarismo binário é denominado bit. Um grupo de 8 bits corresponde a 1 byte. Assim, percebemos que a representação dos números binários num computador é feita com um número finito de bits. A esse tamanho finito de bits é dado o nome de palavra de computador.

Lembre-se

O tamanho da palavra de computador depende de características internas à arquitetura dele. Em geral, os microcomputadores padrão PC têm tamanho de palavra de 16 a 32 bits. Computadores modernos têm palavras de 64 bits ou mais. Quanto maior é o tamanho da palavra do computador, mais veloz e mais preciso será o computador.

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que podem ser encontradas no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer sistema de ponto flutuante.
2. Objetivos de aprendizagem	Fornecer condições para que você, aluno, possa conhecer e aplicar a aritmética de ponto flutuante em situações-problemas.

3. Conteúdos relacionados	Aritmética de ponto flutuante
4. Descrição da SP	Considerando agora que estamos diante de uma máquina que utilize apenas três dígitos significativos e que tenha como limite inferior e superior para o expoente, respectivamente, -2 e 2, como seriam representados nessa máquina os números reais $x_1 = 0{,}35$, $x_2 = -5{,}172$, $x_3 = 0{,}0123$, $x_4 = 0{,}0003$, e $x_5 = 5391{,}3$ em que estão todos na base $\beta = 10$ em notação de um sistema de aritmética de ponto flutuante?
5. Resolução da SP	Temos, então, para essa máquina $t = 3$, $m = -2$ e $M = 2$. Dessa forma, $-2 \leq E \leq 2$. Sendo assim, temos $0{,}35 = 0{,}350 \times 10^0$ $-5{,}172 = -0{,}517 \times 10^1$ $0{,}0123=0{,}123 \times 10^{-1}$ $5391{,}3 = 0{,}53913 \times 10^4$. Não pode ser representado por essa máquina. Erro de *overflow*. $0{,}0003= 0{,}3 \times 10^{-3}$. Não pode ser representado por essa máquina. Erro de *underflow*.

Atenção!

Alguns exemplos de sistemas de ponto flutuante: HP25, F(10, 9, –98, 100); IBM 360/370, F(16, 6, –64, 63) e B6700, F(8, 13, –51, 77).

Lembre-se

Você pode rever os conceitos de representação de números no sistema de ponto flutuante no livro de cálculo numérico em português disponibilizado em: <http://www.decom.ufop.br/bcc760/material_de_apoio/livros/livro_port.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2015.

Faça valer a pena

1. Considere o sistema F (10, 3, -3, 3). Marque a alternativa cujo número não pode ser representado nesse sistema por *overflow*.

a) -279,13.

b) 1,25.

c) 0,000056.

d) 1234,45.

e) 19,23456.

As questões de 2 a 5 referem-se ao seguinte enunciado.

Considere uma máquina cujo sistema de representação de números é definido por base 2, 3 dígitos na mantissa (t=3), e expoentes no intervalo [-1,2] (FRANCO, 2006).

2. Encontre a cardinalidade, ou seja, quantos números são representados por esse computador?

a) 33.

b) 10.

c) 23.

d) 21.

e) 41.

3. Quais são o maior e o menor elementos positivos desse sistema?

4. Quais números podemos representar nesse sistema?

5. Considerando o sistema de ponto flutuante do enunciado, quais dos seguintes números 0,38; 5,3 e 0,15 podem ser representados na base 10?

a) Todos.

b) Apenas o 0,38.

c) Os números 0,38 e 5,3.

d) Os números 0,15 e 5,3.

e) Apenas o número 0,15.

6. Como o número $(0,11)_{10}$= (0,00011100001010001111010111000010100011110........$)_2$ será armazenado em uma máquina que opera com apenas 6 dígitos na mantissa, ou seja, que seja capaz de armazenar números no formato m= $\underline{+}$0,d1d2d3d4d5d6 × 10E? (Disponível em: <http://www1.univap.br/spilling/CN/CN_Capt1.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2015).

a) $(0,109375)_{10}$.

b) $(0,100000)_{10}$.

c) $(0,111193)_{10}$.

d) $(0,111111)_{10}$.

e) $(0,100111)_{10}$.

7. Marque a alternativa correta.

a) O conjunto de números em um sistema de ponto flutuante é discreto, e não contínuo como os números reais.

b) O conjunto de números em um sistema de ponto flutuante é infinito como nos números reais.

c) Sempre que uma operação aritmética produz um número com expoente superior ao expoente máximo, temos um *underflow*.

d) *Overflow* ocorre quando um resultado com valor menor que o menor valor representável por uma específica quantidade de bits está disponível numa máquina dada.

e) O uso do truncamento, embora apresente menores erros, acarreta um tempo maior de execução, razão pela qual o arredondamento é mais utilizado.

Seção 1.3

Análise de Erros - Parte I

Diálogo aberto

Na seção anterior, você aprendeu sobre aritmética de ponto flutuante e sobre a representação dos números num sistema computacional, sendo esta última limitada pela capacidade da máquina. Nesta seção, vamos estudar sobre análise de erros, pois a noção de erros está presente em todos os campos do cálculo numérico.

Sabemos que os dados nem sempre são exatos e que as operações realizadas sobre esses valores não exatos propagam esses erros a seus resultados. Assim, os métodos numéricos, métodos esses aproximados, buscam minimizar esses erros, procurando resultados que se aproximem dos valores exatos.

Nesta seção, analisaremos os erros que ocorrem durante as fases de modelagem e resolução e também sobre erros de arredondamento e erros de truncamento.

Dica

O livro-texto da disciplina apresenta um bom conteúdo sobre o assunto, sendo importante referência para o estudo e concretização do aprendizado. Avalie seu aprendizado e faça as atividades propostas.

Reflita

O cálculo numérico faz parte da análise numérica, no sentido amplo, que comumente está preocupada com a quantificação dos erros cometidos nas diversas etapas de aproximação, tais como arredondamento e truncamento, e também com questões mais refinadas no escopo dos processos de aproximação.

Vamos voltar à situação hipotética apresentada no Convite ao Estudo? Uma das situações-problema apresentadas pelos técnicos a Carlos foi a seguinte:

Os técnicos do laboratório de engenharia precisavam representar o número 73,758 e descobrir o resultado das somas S1 = 42450 + $\sum_{k=1}^{10} 3$ e S2= $\sum_{k=1}^{10} 3$ + 42450 na máquina nova adquirida. Então pediram ajuda a Carlos para realizar essa tarefa. Os técnicos sabiam que a máquina nova possuía um sistema de representação de números definidos por base decimal, 4 algarismos na mantissa e expoentes com intervalos de [-5,5]. Como Carlos (você) pode ajudar os técnicos a solucionarem o problema?

Reflita

O que eu preciso para ser capaz de resolver a situação-problema?

Conhecer e aplicar conhecimentos de análise de erros, em particular erros absolutos, relativos, arredondamento e truncamento.

Não pode faltar

Erros na fase de modelagem

Por que não temos uma descrição correta ao tentar representar um fenômeno físico por um método matemático? Isso ocorre porque são necessárias várias simplificações do mundo físico para encontrar um modelo.

Exemplificando

Suponha estar diante do seguinte problema: você está em cima de um edifício cuja altura não tem conhecimento, mas precisa determiná-la. Tudo que tem em mãos é uma bola de metal e um cronômetro. O que fazer? A bolinha foi solta do topo do edifício e marcou-se no cronômetro que ela levou 2 segundos para atingir o solo. Com isso, podemos concluir a partir da equação

$s= s_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}$ que a altura do edifício é de 19,6 metros. Essa resposta é confiável? Onde estão os erros?

Erros de modelagem: – resistência do ar, – velocidade do vento, – forma do objeto, etc. Esses erros estão associados, em geral, à simplificação do modelo matemático.

Erros de resolução: – precisão dos dados de entrada (ex.: precisão na leitura do cronômetro. p/ t = 2,3 segundos, h = 25,92 metros, gravidade); – forma como os dados são armazenados; – operações numéricas efetuadas; – erro de truncamento (troca de uma série infinita por uma série finita). Há fatores que não estão sendo considerados, como a resistência do ar, as velocidades do vento, etc. Se o tempo fosse 2,5 e a distância 54,015, teríamos uma variação no cronômetro e consequentemente na altura.

Erros devido ao Armazenamento - Erros de Arredondamento e Truncamento

Assimile

Os erros de arredondamento podem surgir de duas fontes distintas: no processo de conversão de base e na representação finita de dígitos que as máquinas utilizam (SPERANDIO; MENDES; SILVA, 2003, p. 7).

Reflita

Vimos, na seção anterior, que o número decimal 0,6 é representado em binário por 0,10011001... e isso mostra que o valor em decimal é armazenado de forma aproximada, ou seja, não tem representação exata na base binária. Dessa forma, pode-se concluir que nem todos os números reais têm representação no sistema binário, sendo necessário arredondar ou truncar para o número mais próximo da máquina.

Erro de arredondamento: para fazer o registro de um valor aproximado, utilizamos a seguinte regra:

1) Somamos meia unidade a última casa decimal a conservar.

2) Desprezamos as demais casas.

Segundo Franco (2006, p. 43), arredondar um número x por outro, com um número menor de dígitos significativos, consiste em encontrar um número x', pertencente ao sistema de numeração, tal que $|x' - x|$ seja o menor possível.

Reflita

A melhor aproximação para $x_1 = 2{,}142857$ seria 2,142 ou 2,143?

Efetuamos os cálculos $|2{,}142 - x_1| = 0{,}000857$ e $|2{,}143 - x_1| = 0{,}000143$. Logo, 2,143 representa a melhor aproximação para $x_1 = 2{,}142857$ usando 4 dígitos significativos.

Erros de truncamento: são utilizados em processos muitos grandes para o cálculo de um valor, razão pela qual são truncados. Esses processos infinitos são utilizados, por exemplo, em exponencial, logaritmos, funções trigonométricas.

No truncamento, os dígitos que excedem o limite da mantissa são desprezados. Por exemplo, seja $x = 234{,}57$ representado com $t = 4$, logo $x = 0{,}2345 \times 10^3$, sendo que 0,07 foi desprezado no truncamento.

Segundo Ruggiero e Lopes (1996, p. 15), o uso de arredondamento, embora apresente menores erros, acarreta um tempo maior de execução, razão pela qual o truncamento é mais utilizado.

Exemplificando

Dar a representação dos números a seguir num sistema de aritmética de ponto flutuante de três dígitos para $\beta = 10$, $m = -4$ e $M = 4$.

X	Representação obtida por arredondamento	Representação obtida por truncamento
1.25	$0{,}125 \times 10$	$0{,}125 \times 10$
10.053	$0{,}101 \times 10^2$	$0{,}100 \times 10^2$
-238.15	$-0{,}238 \times 10^3$	$-0{,}238 \times 10^3$
2.71828...	$0{,}272 \times 10$	$0{,}271 \times 10$
0.000007	(expoente menor que -4)	=
718235.82	(expoente maior que 4)	=

Fonte: Ruggiero e Lopes (1996, p. 15).

Erros relacionados às aproximações dos cálculos (números de iterações)

Erros relacionados à aproximação de cálculos (números de iterações) são erros causados quando utilizamos num processo algorítmico infinito apenas uma parte finita do processo.

Exemplo: Cálculo da função ln(x+1)?

ln (x+1)= $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$

Fazendo o truncamento, temos ln (x+1)= $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n}$.

A solução é interromper os cálculos quando uma determinada precisão é atingida.

Erros nas operações aritméticas

Um dos aspectos importantes do cálculo numérico é manter o “controle” dos erros de arredondamento e truncamento, já que é preciso compreender como o erro em uma operação se propaga em operações subsequentes.

Ruggiero e Lopes (1996, p. 19) indicam que a análise completa da propagação de erros se faz considerando o erro nas parcelas ou fatores e no resultado de cada operação efetuada. Observe os exemplos apresentados por Franco (2006, p. 46).

Exemplificando

Considerar base 10 e 3 dígitos significativos para efetuar as operações indicadas.

i) (11,4 + 3,18) + 5,05 e 11,4 + (3,18 + 5,05)

ii) (3,18 .11,4)/5,05 e (3,18/5,05) · 11,4

iii) 3,18 · (5,05 + 11,4) e 3,18 · 5,05 + 3,18 · 11,4

Para cada item, fazendo o arredondamento após cada uma das operações efetuadas, segue que:

i) (11,4 + 3,18) + 5,05 = 14,6 + 5,05 = 19,7

ao passo que no outro cálculo: 11,4 + (3,18 + 5,05) = 11,4 + 8,23 = 19,6.

ii) (3,18 . 11,4)/5,05 = 36,3/5,05 = 7,19

e no outro cálculo: (3,18/5,05) · 11,4 = 0,630. 11,4 = 7,18.

iii) 3,18 · (5,05 + 11,4) = 3,18 · 16,5 = 52,3

ao passo que no outro cálculo: 3,18 . 5,05 + 3,18 . 11,4 = 16,1 + 36,3 = 52,4.

Franco (2006, p. 47) faz uma importante observação a respeito dos erros ocorridos:

> [...] erros consideráveis podem ocorrer durante a execução de um algoritmo. Isso se deve ao fato de que existem limitações da máquina e também que os erros de arredondamento são introduzidos a cada operação efetuada. Em consequência, podemos obter resultados diferentes mesmo utilizando métodos numéricos matematicamente equivalentes.
> Assim, devemos ser capazes de conseguir desenvolver um algoritmo tal que os efeitos da aritmética discreta do computador permaneçam inofensivos quando um grande número de operações são executadas.

Erros absoluto e relativo

Erro absoluto: diferença entre o valor exato de um número x e seu valor aproximado $\bar{x}$ obtido a partir de um procedimento numérico.

$$EA_x = | x - \bar{x}|$$

Apenas $\bar{x}$ é conhecido, o que fazemos é escolher um limitante superior ou fazer uma estimativa para o módulo do erro absoluto. Isso permitirá que, mesmo não conhecendo o erro, saibamos que ele está entre dois valores conhecidos.

Exemplificando

1) Sabendo-se que π ∈ (3,14; 3,15), tomaremos para π um valor dentro desse intervalo e teremos, então, $|E_{ax}| = |\pi - \bar{\pi}| < 0{,}01$.

2) Se considerarmos o número $\bar{x}$= 1241,9 de forma que $|EAx|$< 0,1, temos x ∈ (1241,8; 1242)

3) Se $\bar{y}$ = 1,3 de forma que $|EAy|$< 0,1 podemos dizer que y ∈ (1,2; 1,4).

Os limitantes superiores para os erros absolutos nos exemplos do número 1 e 2 são os mesmos.

Podemos afirmar que os valores de x e y foram representados com a mesma precisão?

O erro absoluto, portanto, não é suficiente para descrever a precisão de um cálculo, pois depende da ordem de grandeza dos números trabalhados. Assim, o conceito de erro relativo é mais utilizado.

Por isso, é importante compararmos a ordem de grandeza dos números x e y. Assim, vamos perceber que um resultado é mais preciso que o outro, isso porque a ordem de grandeza de x é maior que a ordem de grandeza de y.

Erro relativo: erro absoluto dividido pelo valor aproximado.

$$EA_R = \frac{|EA_x|}{|\bar{x}|} = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|}$$

Exemplificando

Se **α** = 3876,373 e só desejamos a parte inteira **α’**, o erro absoluto será:

$$\Delta\alpha = |\alpha - \alpha'| = 0{,}373.$$

Se fizermos o mesmo com o número **β** = 1,373, teremos:

$$\Delta\beta = |\beta - \beta'| = 0{,}373$$

Obviamente, o efeito de aproximação de **β** é muito maior do que em **α**, mas o erro absoluto é o mesmo nos dois casos. O erro relativo, entretanto, pode traduzir perfeitamente esse fato, pois:

$\delta\alpha = 0{,}373/\ 3876 \cong 0{,}000096$ $\delta\beta = 0{,}373/\ 1 = 0{,}373$

Disponível em: <http://www.inf.ufpr.br/aurora/disciplinas/numerico/apostila.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2015.

Frequentemente, o erro relativo é expresso também como **erro percentual**, chamado taxa de erro. Para isso, basta multiplicar o erro relativo por 100: erro percentual = erro relativo × 100.

$$\text{Erro percentual}=\frac{\left|x-\overline{x}\right|}{\left|\overline{x}\right|}\cdot 100$$

Pesquise mais

Você pode encontrar mais sobre o estudo de análise de erro em <http://www2.sorocaba.unesp.br/professor/luiza/CNC/apostila.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2015.

Faça Você Mesmo

Considere o sistema F(10,3,5,5). Efetue as operações indicadas:

(1,386-0,987) + 7,6485 e 1,386 – (0,987 -7,6485).

Sem medo de errar

Após o estudo de conversão de números inteiros e fracionários decimais para binários, vamos resolver a primeira situação-problema apresentada a Carlos?

Os técnicos do laboratório de engenharia precisavam representar o número 73,758 e descobrir o resultado das somas S1 = 42450 + $\sum_{k=1}^{10} 3$ e S2= $\sum_{k=1}^{10} 3$ + 42450 na máquina nova adquirida. Então pediram ajuda a Carlos para realizar essa tarefa. Os técnicos sabiam que a máquina nova possuía um sistema de representação de números definidos por base decimal, 4 algarismos na mantissa e expoentes com intervalos de [-5,5]. Como Carlos (você) pode ajudar os técnicos a solucionarem o problema?

Solução

1) $0,7375\times 10^2$ (truncamento) e $0,7376\times 10^2$ (arredondamento)

2) O resultado deveria ser o mesmo, contudo as operações devem ser realizadas na ordem em que aparecem as parcelas, o que conduzirá a resultados distintos. Assim temos:

S1= 42450 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3

$= 0{,}4245\times10^5 + 0{,}00003\times10^5 = 0{,}42453\times10^5 \rightarrow 0{,}4245\times10^5$ (representado na mantissa com 4 dígitos)

Depois teremos:

$0{,}4245\times10^5 + 0{,}00003\times10^5 = 0{,}42453\times10^5$ (idem)

Em seguida teremos:

$0{,}4245\times10^5 + 0{,}00003\times10^5 = 0{,}42453\times10^5$

...até terminar a última soma individual:

$S1 = 0{,}4245\times10^5$

S2 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 42450

$= 0{,}3000\times10^1 + 0{,}3000\times10^1 = 0{,}6000\times10^1$

$= 0{,}6000\times10^1 + 0{,}3000\times10^1 =0{,}9000\times10^1$

$= 0{,}9000\times10^1 + 0{,}3000\times10^1 =1{,}2000\times10^1 = 0{,}1200\times10^2$

$= 0{,}1200\times10^2 + 0{,}03000\times10^2 = 0{,}1500\times10^2$

até terminar o último 3 que resultará no número $0{,}3000\times10^2$. Depois é feita a soma com o número 42450, e no final teremos:

$0{,}3000\times10^2 \rightarrow 0{,}0003\times10^5$

$S2=0{,}0003\times10^5 + 0{,}4245\times10^5 = 0{,}4248\times10^5$

Atenção!

Eliminar os erros na resolução de problemas por meio de métodos numéricos é praticamente impossível, mas o que pode ser feito é minimizar os efeitos da propagação desses erros.

Avançando na prática

<table>
<tr><th colspan="2">Pratique mais</th></tr>
<tr><td colspan="2">Instrução
Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que podem ser encontradas no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Representação de um número</td></tr>
<tr><td>1. Fundamentos de competências de área</td><td>Conhecer análise de erros.</td></tr>
<tr><td>2. Objetivos de aprendizagem</td><td>Conhecer e aplicar análise de erros em situações-problemas</td></tr>
<tr><td>3. Conteúdos relacionados</td><td>Análise de erros.</td></tr>
<tr><td>4. Descrição da SP</td><td>Considere uma máquina cujo sistema de representação de números é definido por base decimal, 4 algarismos na mantissa e expoentes no intervalo [-5,5]. Calcule o valor de a + b, em que a= 42450 e b=3.</td></tr>
<tr><td>5. Resolução da SP</td><td>Primeiro, vamos deixar os números com a mesma base considerando t=4.
$a = 0,4245\times10^5$ e $b = 0,00003\times10^5$
$a + b= 0,4245\times10^5 + 0,00003= 0,42453\times10^5$
Mas o resultado será armazenado com 4 algarismos na mantissa, portanto $a + b= 0,4245\times10^5$.</td></tr>
</table>

Atenção!

Você pode rever os conceitos de representação de números no sistema de ponto flutuante no livro de cálculo numérico em português disponibilizado em <http://www.decom.ufop.br/bcc760/material_de_apoio/livros/livro_port.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2015.

Lembre-se

O **erro de truncamento** é o erro que ocorre em razão do método numérico aplicado (por exemplo, expansão truncada de uma série, linearização de uma função). O **erro de arredondamento** é o erro causado pela representação de um número real em um sistema de ponto flutuante.

Faça valer a pena

O seguinte enunciado associa-se às questões 1, 2 e 3.

Considere um sistema de ponto flutuante com b = 10 e n = 3 e uma representação por arredondamento.

1. Imagine uma máquina cuja representação de números é definida por F(10,4,-5,5). Qual a alternativa correta ao considerar o truncamento?

a) O número $\bar{x}= 0,7376 .10^2$ é a representação do número 73,758.

b) O erro relativo encontrado é 0,002%.

c) O erro absoluto é 0,007.

d) O erro absoluto e relativo são iguais.

e) A representação do número 73,58 por arredondamento correta é $\bar{x}= 0,7375 \text{x}10^2$.

2. Marque a alternativa correta.

a) Erro absoluto= valor real – valor aproximado.

b) Se o resultado de uma operação é 2123542 e o valor esperado era 2123544,5, o erro absoluto nesse caso é 1,8. A diferença é bem pequena, portanto podemos considerar o resultado preciso.

c) Se o resultado de uma operação é 0,234 e o resultado esperado era de 0,128, o erro absoluto é 0,106, porém o resultado é impreciso.

d) Erro relativo= erro absoluto/valor real.

e) Todas as alternativas estão corretas.

3. Considere os dados x=100; $\bar{x}$ = 100,1, y=0,0006 e $\bar{y}$ = 0,0004 e marque a alternativa correta.

a) EA_x= 0,1 e EA_y= 0,0002.

b) Como EA_y é muito menor que EA_x, podemos afirmar que a aproximação $\bar{y}$ de y é pior que a $\bar{x}$ de x.

c) $ER_x \neq 0,33333333$.

d) ER_y = 0,999999.

e) $ER_x > ER_y$.

4. Se P(x)= x^3 -6x^2+ 4x – 0,1, o valor exato de P(x) para x= 5,24 será:

a) -0,00776.

b) 0,0776.

c) -0,010.

d) 0,00.

e) 0,005.

5. Sobre as operações no sistema de ponto flutuante, podemos afirmar que:

a) A operação da adição é associativa.

b) A operação da adição é distributiva.

c) Os erros introduzidos a cada operação pouco influem na solução obtida pelo método numérico aplicado.

d) Os métodos numéricos matematicamente equivalentes podem fornecer resultados diferentes.

e) Pelo fato de o arredondamento ser feito após cada operação, essas são associativas e distributivas.

6. Calcule o valor numérico de *e* (número de Euler), empregando a série truncada de 4ª ordem.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

7. Considere um sistema de ponto flutuante com b = 10 e n = 3 e uma representação por arredondamento. Verifique se:

a) $15{,}9 \cdot (4{,}99 + 0{,}02) \neq (15{,}9 \cdot 4{,}99) + (15{,}9 \cdot 0{,}02)$.

b) $(0{,}123 / 7{,}97) \cdot 84{,}9 \neq (0{,}123 \cdot 84{,}9) / 7{,}97$.

c) $(4210 - 4{,}99) - 0{,}02 \neq 4210 - (4{,}99 + 0{,}02)$.

Seção 1.4

Análise de Erros - Parte II

Diálogo aberto

Na seção anterior, você aprendeu sobre análise de erros: erros de arredondamento e truncamento, erros nas operações aritméticas, erros absolutos e relativos. Nesta seção vamos continuar nossos estudos sobre análise de erros, mas agora trabalharemos com a propagação de erros e cancelamento.

O objetivo das seções 1.3 e 1.4 é o de apresentar alguns aspectos sobre erros numéricos. Você aprendeu que a representação dos números num sistema computacional é limitada pela capacidade da máquina e que, por isso, são usados o truncamento ou o arredondamento dos dados. Outro aspecto importante estudado é que os erros de arredondamento intermediários podem comprometer o resultado final de um algoritmo, sendo, portanto, importante manter o controle desses erros.

Mesmo com o avanço na tecnologia de construção de computadores e máquinas digitais, é possível verificar que os resultados finais podem sempre ser influenciados por erros como os de arredondamento e restrições do armazenamento de números.

Dica

Como leitura adicional, recomenda-se realizar uma busca na internet por falhas e acidentes causados por erros numéricos. Sugestão de pesquisa: *disasters caused by numerical errors*.

Vamos relembrar a situação hipotética apresentada no Convite ao Estudo? Uma das situações-problema apresentadas pelos técnicos a Carlos foi a seguinte:

Os técnicos da engenharia foram solicitados a calcular o perímetro e a área do laboratório da empresa, formado por um retângulo com sua cota x = 17534mm e a cota y =21178mm. Tendo em vista os resultados obtidos, os profissionais foram questionados sobre qual resultado apresentava o maior erro relativo. Não sabendo como proceder, pediram ajuda a Carlos. E agora, como Carlos (você) pode resolver esse problema?

Reflita

O que eu preciso para ser capaz de resolver a situação-problema?

Conhecer e aplicar conhecimentos de análise de erros, em particular, propagação de erros absolutos e relativos e cancelamento.

Não pode faltar

Segundo Franco (2006), além dos erros causados pelas operações aritméticas, das fontes de erros citados na seção anterior, existem certos efeitos numéricos que contribuem para que o resultado obtido não tenha crédito. Vamos estudar alguns deles: cancelamento e propagação do erro.

Cancelamento

O efeito da perda de dígitos significativos na subtração de números muito próximos é chamado cancelamento.

Exemplificando

Veja o exemplo da subtração dos números $\sqrt{9876}-\sqrt{9875}$ em um sistema F(10,10,-10,10). Temos:

$$\sqrt{9876}-\sqrt{9875}=0{,}9937806599\cdot 10^{2}-0{,}9937303457\cdot 10^{2}=0{,}0000503142\cdot 10^{2}$$

Normalizando o resultado, temos que:

$$\sqrt{9876}-\sqrt{9875}=0{,}5031420000\cdot 10^{-2}$$

Reflita

Na prática, os quatro zeros no final do número não têm significado e, perdem-se quatro dígitos de precisão na mantissa. O erro de cancelamento pode ser contornado utilizando manipulações algébricas de forma a evitar a subtração desses números.

Podemos reescrever a diferença desta forma: $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

Neste caso, a diferença torna-se:

$$\sqrt{9876} - \sqrt{9875} = \frac{9876-9875}{\sqrt{9876}+\sqrt{9875}} = 0{,}5031418679 \cdot 10^{-2}$$

que tem todos os dígitos da mantissa preenchidos.

Exemplificando

Para resolver a equação $x^2 - 1634 \cdot x + 2 = 0$, considere o sistema F(10,10,10,10).

Utilizando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para a equação, x = $\frac{1634 \pm \sqrt{1634^2 - 4.2}}{2} = \frac{1634 \pm 1633{,}9975}{2}$

Para evitar o erro de cancelamento no cálculo da diferença, basta lembrarmos que o produto das raízes é igual ao termo independente do polinômio, ou seja, $x_1 * x_2 = 2$. A segunda raiz será calculada por $x_2 = \frac{2}{x_1}$

x_1=0,1633998776 .10^3 e x_2 = 0, 1223991125.10^{-2}

Propagação de erros

O erro total que ocorre em uma operação é constituído pelo erro das parcelas mais o erro no resultado. A seguir, iremos definir fórmulas para o cálculo dos erros absolutos e relativos nas operações com erro nas parcelas.

Seja $\overline{x}$ uma aproximação para x, e $\overline{y}$ uma aproximação para y, ou seja, x= $EA_x + \overline{x}$ e y= $EA_y + \overline{y}$

Lembre-se

EA_x= erro absoluto de x

ER_x= erro relativo de x

Assim, temos:

- Soma: x+ y

$x+y= (\bar{y}+ EA_x) + (\bar{y}+EA_y)= (\bar{x}+\bar{y}) + (EA_x + EA_y)$

Então, o erro absoluto na soma, denotado por EA $_{(x+y)}$ é a soma dos erros absolutos das parcelas: EA $_{(x+y)}= \left|EA_x + EA_y\right|$

- Subtração: x-y

Analogamente, temos EA $_{(x-y)}= \left|EA_x - EA_y\right|$

- Multiplicação: xy

$xy= (\bar{x}+ EA_x) (\bar{y}+EA_y)$

$= \bar{x}\,\bar{y} + \bar{x}EA_y + \bar{y}EA_x + (EA_x) (EA_y)$

Considerando que $(EA_x) (EA_y)$ é um número pequeno, podemos desprezar esse termo, logo teremos:

EA $_{(xy)}= \left|\bar{x}EA_y + \bar{y}EA_x\right|$

- Divisão: x/y

$$\frac{x}{y} = \frac{\bar{x}+EA_x}{\bar{y}+EA_y} = \frac{\bar{x}+EA_x}{\bar{y}} \left(\frac{1}{1+\frac{EA_y}{\bar{y}}} \right)$$

Representando o fator $\frac{1}{1+\frac{EA_y}{\bar{y}}}$ sob a forma de uma série infinita, teremos

$$\frac{1}{1+\frac{EA_y}{\bar{y}}} = 1- \frac{EA_y}{\bar{y}} + \left(\frac{EA_y}{\bar{y}}\right)^2 - \left(\frac{EA_y}{\bar{y}}\right)^3 + \ldots$$

e desprezando os termos com potências maiores que 1, teremos

$$\frac{x}{y} \approx \frac{\bar{x}+EA_x}{\bar{y}} \left(1- \frac{EA_y}{\bar{y}}\right) = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} + \frac{EA_x}{\bar{y}} - \frac{\bar{x}EA_y}{\bar{y}^2} - \frac{EA_xEA_y}{\bar{y}^2}$$

Então: $\frac{x}{y} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} + \frac{EA_x}{y} - \frac{\bar{x}EA_y}{\bar{y}^2}$

Desse modo:

$$EA_{(x/y)} = \left| \frac{EA_x}{\bar{y}} - \frac{\bar{x}EA_y}{\bar{y}^2} \right|$$

Propagação de erros relativos

- Soma

$$ER_{x+y} = \frac{EA_{x+y}}{\bar{x}+\bar{y}} = \frac{EA_x}{\bar{x}}\left(\frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}}\right) + \frac{EA_y}{\bar{y}}\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}}\right)$$

$$= ER_x \frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}} + ER_y \frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}}$$

- Subtração

$$ER_{x-y} = \frac{EA_x - EA_y}{\bar{x}-\bar{y}} = ER_x \frac{\bar{x}}{\bar{x}-\bar{y}} - ER_y \frac{\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}}$$

- Multiplicação

$$ER_{xy} = \frac{\bar{x}EA_y + \bar{y}EA_x}{\bar{x}\bar{y}} = \frac{EA_x}{\bar{x}} + \frac{EAy}{\bar{y}} = ER_x + ER_y$$

- Divisão

$$ER_{x/y} = \frac{\bar{y}EA_x - \bar{x}EA_y}{\bar{y}^2} . \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{EA_x}{\bar{x}} - \frac{EA_y}{\bar{y}} = ER_x - ER_y$$

O erro relativo das operações é obtido a partir da combinação dos erros relativos de cada operação, sendo adicionado ao erro em razão do tipo de armazenamento numérico (δ).

Assim teremos:

Soma e subtração

$$ER_{x\pm y} = \left| ER_x \frac{\bar{x}}{\bar{x} \pm \bar{y}} \pm ER_y \frac{\bar{y}}{\bar{x} \pm \bar{y}} \right| + \delta$$

Multiplicação

$ER_{xy} = |ERx + ERy| + \delta$

Divisão

$ER_{x/y} = |ERx - ERy| + \delta$

Atenção!

O fator δ, associado ao erro devido ao fato de o computador trabalhar com números truncados ou arredondados, é dado por:

$\delta = 10^{-t+1}$ (no caso de truncamento)

$\delta = ½\ 10^{-t+1}$ (no caso de arredondamento)

Em que t= número de dígitos da mantissa.

Exemplificando

Dados x, y e z=x – y, então temos:

$ER_z = \dfrac{EA_x - EA_y}{\bar{x} - \bar{y}} = \dfrac{EA_x}{\bar{x}}\left(\dfrac{\bar{x}}{\bar{x} - \bar{y}}\right) - \dfrac{EA_y}{\bar{y}}\left(\dfrac{\bar{y}}{\bar{x} - \bar{y}}\right)$ se x e y forem números positivos arredondados, então $\left|\dfrac{EA_x}{\bar{x}}\right| < \dfrac{1}{2}.10^{-t+1}$ e $\left|\dfrac{EA_y}{\bar{y}}\right| < \dfrac{1}{2}.10^{-t+1.}$

Se $\bar{x} = 0{,}2357 \text{ x}10^3$ e $\bar{y} = 0{,}2353\text{x}10^3$, então $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = 0{,}0004\text{x}10^3$. Qual o erro relativo em z?

Solução:

O erro relativo em z é limitado por:

$$|ER_z| < \left(\frac{0{,}2357.10^3 + 0{,}2353.10^3}{0{,}0004.10^3}\right).\frac{1}{2}.10^{-3}$$ em que t=4

$|ER_z| <$ 0,5888≈ 59%

Pesquise mais

Você pode encontrar mais sobre o estudo de análise de erro no *link* <https://chasqueweb.ufrgs.br/~esequia.sauter/numerico/Notas.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2015.

Faça você mesmo

Considerando o exemplo citado acima, encontre o erro relativo de w, sendo que w=zt, se $\bar{t}$ =0,4537.10^3.

Sem Medo de Errar

Após o estudo de conversão de números inteiros e fracionários decimais para binários, vamos resolver a primeira situação-problema apresentada a Carlos?

Os técnicos da engenharia foram solicitados a calcular o perímetro e a área do laboratório da empresa, formado por um retângulo com sua cota x = 17534 mm e a cota y =21178 mm. Tendo em vista os resultados obtidos, os profissionais foram questionados sobre qual resultado apresenta o maior erro relativo. Não sabendo como proceder, pediram ajuda a Carlos. Como Carlos (você) pode resolver esse problema?

Solução:

Cálculo dos erros absoluto e relativo das variáveis 2.(35068) e 2.(42356).

$EA_{2x} = \left|2x - \overline{2x}\right| =$ |35068-35070|= 2

$EA_{2y} = \left|2y - \overline{2y}\right| =$ |42356-42360|= 4

$ER_{2x} = \frac{EA_{2x}}{\overline{}} =$ 2/35070 = 5,703.10^{-5}

$ER_{2y=}\ \frac{EA_{2y}}{\overline{2y}} =$ 4/42360 = 9,443.10^{-5}

Cálculo do erro relativo das operações (2x+ 2y) (perímetro do retângulo) e x.y (área do retângulo).

Perímetro (2.x+ 2.y):

$$ER_{2x} = \left| \frac{\overline{2x}}{\overline{2x}+\overline{2y}} ER_{2x} + \frac{\overline{2y}}{\overline{2x}+\overline{2y}} ER_{2y} \right| + \delta, \text{em que } \delta = ½.10^{-t+1} \text{(arredondamento)}$$

$= (35070/\ 77430)\ 5{,}703.10^{-5} + (42360/\ 77430)\ 9{,}443.10^{-5} + ½\ .10^{-4+1}$

$=2{,}5830.10^{-5} + 5{,}1660^{-5} + 5.10^{-4}$

$= 5{,}7749.10^{-4}$

Área (x.y):

$ER_{xy} = ER_x + ER_y + \delta$, onde $\delta = ½.\ 10^{-t+1}$ (arredondamento)

$= 2{,}281.10^{-4} + 9{,}442.10^{-5} + 5.10^{-4} = 8{,}2242.10^{-4}$

Logo, a operação x.y apresentará o maior erro relativo final.

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que podem ser encontradas no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com as de seus colegas.	
Erro Relativo	
1. Competência de fundamentos de área	Interpretar os erros numéricos.
2. Objetivos de aprendizagem	Conhecer e aplicar os erros numéricos em situações-problemas.
3. Conteúdos relacionados	Análise de erros.
4. Descrição da SP	Como podemos calcular o erro relativo na operação x^4 considerando $ER_x = 2{,}281^{-4}$ e t=4, ou seja, 4 algarismos na mantissa?

5. Resolução da SP	$ER_{xx} = ER_{x^2} = ER_x + ER_x + \boldsymbol{\delta}$, onde $\boldsymbol{\delta} = ½\ 10^{-t+1}$ $ER_{xx^2} = ER_{x^3} = ER_x + ER_{x^2} + \boldsymbol{\delta} = 3\ ER_x + 2\ \boldsymbol{\delta}$ $ER_{xx^3} = ER_{x^4} = ER_{x\ +}\ ER_{x^3} + \boldsymbol{\delta} = 4\ ER_x + 3\ \boldsymbol{\delta}$ Logo, $ER_{x^4} = 4 \cdot 2{,}281^{-4} + 3 \cdot 5^{-4} = 2{,}4124^{-3}$

Atenção!

Você pode rever os conceitos de representação de números no sistema de ponto flutuante no livro de cálculo numérico em português disponibilizado em <http://www.decom.ufop.br/bcc760/material_de_apoio/livros/livro_port.pdf>.

Lembre-se

Dizemos que $\bar{x}$ é um número aproximado por falta do valor exato x, se $\bar{x}$< x. Se $\bar{x}$> x, temos uma aproximação por excesso.

Faça valer a pena

1. Dado o sistema abaixo, podemos afirmar que:

$x + y = 2$

$x + 1{,}01y = 2{,}01$

a) A solução desse sistema pode ser facilmente obtida por substituição.

b) Ao resolver o sistema, obtemos: x = 0.

c) Ao resolver o sistema, obtemos y=2.

d) Alterando os dados para:

$x + y = 2$

$x + 1{,}01y = 2{,}02$

o sistema permanece quase igual, mas a solução agora é obtida por x=1 e y=2.

e) Uma pequena mudança nos dados de uma operação não produz uma grande mudança no resultado.

2. Sobre análise de erros, é correto afirmar que:

a) O erro total de uma operação é composto pelo erro das parcelas ou fatores e pelo erro no resultado da operação.

b) Os resultados finais podem sempre ser influenciados por erros como os de arredondamento, mas não pelas restrições do armazenamento de números.

c) O resultado de uma operação não tem valor se tivermos conhecimento sobre os possíveis erros envolvidos no processo.

d) O erro relativo das operações é obtido a partir da combinação dos erros relativos da operação subtraído ao erro devido a tipo de armazenamento numérico (δ).

e) O efeito da perda de dígitos significativos na subtração de números diferentes é chamado cancelamento.

3. O efeito da perda de dígitos significativos na subtração de números quase iguais é chamado cancelamento subtrativo. Assim, o valor de $\sqrt{4567}$ - $\sqrt{4566}$ na base 10 e mantissa 6 é:

a) 0,7456.

b) 0,0074.

c) 0,8765.

d) 1,2313.

e) 0,0047.

O enunciado seguinte é destinado às questões de 4 a 7.

Considere os números x = 17534, y = 21178 e z = 75904, que devem ser armazenados em um sistema com as seguintes características F(10, 4, -6, 6).

4. O erro absoluto das variáveis x e z é:

a) 0,1000.10^{1} e 0,2000.10^{1}.

b) 0,2000.10^{1} e 0,4000.10^{1}.

c) 0,4000.10^{1} e 0,2000.10^{1}.

d) 0,2000.10^{1} e 0,2000.10^{1}.

e) 0,4000.10^{1} e 0,4000.10^{1}.

5. O erro relativo das variáveis x e y são respectivamente:

a) 0,34256.10^{-3} e 0,9447.10^{-4}.

b) 0,2282.10^{-3} e 0,9447.10^{-4}.

c) 0,2282.10^{-3} e 0,5270.10^{-4}.

d) 0,5270.10^{-4} e 0,9447.10^{-4}.

e) 0,2282.10^{-4} e 0,9447.10^{-6}.

6. Qual o valor da expressão $(x + y)/z$?

7. Qual o erro relativo final da operação apresentada no exercício 6?

Referências

ARENALES, S.; DAREZZO, S. **Cálculo numérico**: aprendizagem com apoio de *software*. Thompson Learning, 2008.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise numérica**. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2003.

CANTÃO, L. A. P. **Cálculo numérico e computacional**. Disponível em: <http://www2.sorocaba.unesp.br/professor/luiza/CNC/apostila.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2015.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo numérico**. São Paulo: Pearson, 2006.

GAVALA, Francisco Javier Cobos. **Cálculo numérico:** apuntes para el curso de 2001-2002. Disponível em: <http://www.decom.ufop.br/bcc760/material_de_apoio/livros/livro_port.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2015.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lucia da Rocha. **Cálculo numérico**: **aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luiz Henry Monken e. **Cálculo numérico**: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

Unidade 2

RAÍZES

Convite ao estudo

Nesta unidade, iremos estudar a determinação de raízes de funções, as quais não conseguimos determinar por métodos analíticos; sendo assim, a saída é obtê-las por métodos numéricos como: bissecção, falsa posição, método iterativo linear e Newton-Raphson. Esses métodos não nos informarão os valores exatos das raízes, mas as proximidades de suas respostas são satisfatórias.

Os métodos aqui apresentados são amplamente aplicados em estudos de Engenharia, Física, Química, Economia, entre outras.

Para que você tenha um conhecimento prático e atenda ao citado no parágrafo anterior, a seguir é apresentada uma situação problema real em que terá condições de aplicar os conhecimentos teóricos. Assim:

Suellen financiou um veículo de R$ 50000,00 em 48 parcelas mensais e iguais de R$ 4754,28. Ela necessita saber a taxa de juros utilizada no seu financiamento, podendo haver uma diferença de cerca de R$ 0,10 nessa estimativa para o valor da parcela. Conhecendo a taxa de juros, ela poderá orientar seu irmão que também deseja adquirir um veículo. Sabendo que a equação de cálculo de financiamento é dada por:

$\mathit{Valor\ da\ parcela} = \dfrac{\mathit{Valor\ de\ financiamento}}{\left[\dfrac{1-(1+\mathit{taxa\ de\ juros})^{-\,\mathit{núm.\ de\ parcelas}}}{\mathit{taxa\ de\ juros}}\right]}$; e a taxa de juros, no mercado para financiamento de veículos, varia entre 9% e 10% a.m., ela solicitou a ajuda de quatro amigos: Carlos que resolveu pelo Método da Bissecção; Pedro que fez uso do Método da Falsa Posição; José e Samuel que aplicaram, respectivamente, os Métodos Iterativo Linear e de Newton

Raphson.

Em cada uma das seções seguintes, você será convidado a se colocar no lugar de cada um dos amigos de Suellen e, ao final desta unidade, você poderá responder a dúvida dela, além de identificar as características de cada método e compreender as facilidades e dificuldades de utilização de cada um.

Seção 2.1

Método da Bissecção

Diálogo aberto

Caro aluno, o cálculo dos zeros de uma função é muito usual na área de Engenharia, por exemplo, para a determinação de pontos críticos de produção (Eng. Produção), umidade ótima para compactação de solo em várias obras (Eng. Civil) entre outras, e também em nosso dia a dia, como determinar a taxa de juros do financiamento de um veículo.

Nesta seção, estaremos tratando da determinação do Zero da Função pelo Método da Bissecção e, para isso, estaremos desenvolvendo a resolução do problema de Suellen que foi apresentado no início dessa unidade.

Suellen financiou um veículo e agora deseja saber a taxa de juros desse financiamento, para isso solicitou a ajuda de Carlos. Para dar a resposta que Suellen deseja, Carlos pretende fazer uso do Método da Bissecção.

Coloque-se no lugar de Carlos: o que você precisa saber para resolver esse problema usando cálculo numérico e, mais especificamente, o método da bissecção?

Ao final desta seção, esperamos que você conclua que para resolver o problema, teremos de conhecer aspectos teóricos relacionados ao método da bissecção, como o critério de parada, a função de taxa de juros e conhecer as técnicas de iterações necessárias para desenvolver o método.

Não pode faltar!

Métodos iterativos e critérios de parada

Na resolução de problemas com o auxílio do cálculo numérico é muito comum a repetição de procedimentos semelhantes, com a inclusão, em cada iteração[1], de pequenos ajustes que têm o objetivo de melhorar o resultado obtido até que estejamos

---

[1] Iteração: o mesmo que repetição.

satisfeitos com a resposta ou até que uma quantidade de passos pré-estabelecida seja atingida. Simplificadamente, essa é a descrição do que denominamos **método iterativo**. Os procedimentos repetitivos aplicados na resolução de um problema são efetuados até que o critério de parada seja satisfeito.

Assimile

Na aplicação de um método iterativo, um **critério de parada** é uma condição estabelecida *a priori* que deve ser verificada a cada iteração e que, quando satisfeita, resulta no fim da busca por melhores soluções.

Supondo que em um método iterativo obtenhamos uma sequência de resultados x_1, x_2, ..., x_n , ..., alguns dos critérios de parada mais utilizados são:

- $|f(x_n)| \leq \varepsilon_1$

ou

- $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon_2$,

onde f é a função a qual estamos determinando os zeros e ε_1 e ε_2 são os erros (ou imprecisões) que estamos dispostos a cometer.

Assimile

Um valor x_0 é um zero (ou raiz) de uma função $f(x)$ quando $f(x_0) = 0$.

Método da Bissecção

O método da bissecção é um dos mais simples para a determinação de zeros de funções. Ele faz uso da média aritmética dos extremos de cada intervalo da sua iteração, e a cada uma das iterações o intervalo diminui. Ao final, quando o critério de parada for satisfeito, a média aritmética dos extremos do último intervalo determinado será escolhida como aproximação do zero da função.

O método que estamos estudando não nos fornecerá uma resposta de x onde $f(x)$ será exatamente zero, mas um valor próximo.

Para determinar o Zero da Função $f(x)$ num intervalo $I = [a, b]$, adotaremos o critério de parada $|f(x_n)| \leq \varepsilon$, em que x_n é a média aritmética dos extremos do último intervalo determinado. O procedimento estabelecido pelo método da bissecção segue os seguintes passos:

Assimile

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$, garante a existência do Zero da Função;

2. Efetuamos $x_m = \frac{a+b}{2}$;

3. $|f(x_m)| \leq \varepsilon$, então x_m é o Zero da Função, e fim de cálculo;

$|f(x_m)| > \varepsilon$, então x_m não é o Zero da Função, e deveremos prosseguir os cálculos da seguinte forma:

Se $f(x_m) < 0$ e $f(a) < 0$ então x_m deverá substituir a;

Se $f(x_m) < 0$ e $f(b) < 0$ então x_m deverá substituir b;

Se $f(x_m) > 0$ e $f(a) > 0$ então x_m deverá substituir a;

Se $f(x_m) > 0$ e $f(b) > 0$ então x_m deverá substituir b;

4. Após a determinação do novo intervalo, retornamos ao passo 2.

Esses passos são repetidos até que o critério de parada seja satisfeito.

Pesquise mais

Para que você tenha maior conhecimento sobre esse assunto, acesse <www.dsc.ufcg.edu.br/~cnum/modulos/Modulo4/CN_Parte1_Intro.ppt>. Acesso em: 22 jul. 2015.

Vejamos agora um exemplo de aplicação do método da bissecção:

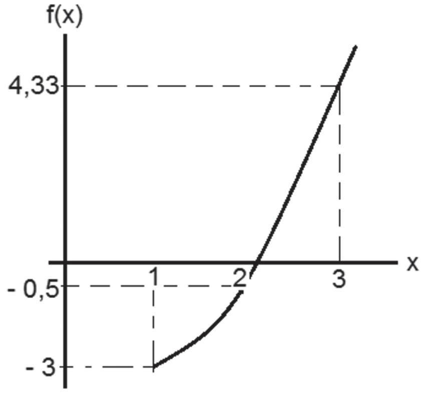
Exemplificando

Dada a função $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 5$, determine o zero dessa função, ou as raízes, ou ainda, o valor que fará ela, a função $f(x)$, igual a zero, para $\varepsilon = 0{,}001$.

Plotando o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 5$, tem-se:

x	$f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 5$
1,00	−3,00
2,00	−0,50
3,00	4,33

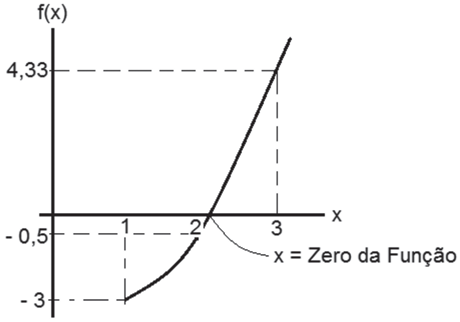
Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 5$



Fonte: Os autores (2015).

É possível notar que a curva corta o eixo x entre os pontos $x = 1$ e $x = 3$, portanto o zero da função está entre esses valores, ou seja, ou valor de x que faz com que $f(x)$ seja igual a zero.

Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 5$ e o zero da função



Fonte: Os autores (2015).

Para obtermos o zero da função, precisamos fazer algumas considerações teóricas e para isso denotaremos $x = 1$ por "a" e $x = 3$ por "b". Temos:

- $f(a) \cdot f(b) < 0$

Se $a = 1$ então $f(a) = f(1) = -3$;

Se $b = 3$ então $f(b) = f(3) = 4{,}3333$.

Assim $f(a) \cdot f(b) = -3 \cdot 4{,}33 = -12{,}9999 < 0$. Esse resultado indica a existência de um zero da função no intervalo de – 3 a $4{,}3333$. Isso pode ser justificado por meio do cálculo, de acordo com o Teorema do Valor Intermediário. Saiba mais sobre o Teorema do Valor Intermediário: <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap114.html>. Acesso em: 31 jul. 15.

<u>1ª Iteração</u>: Como $x = 1$ e $x = 3$ não são zeros da função, devemos determinar um novo valor de x para candidato a zero da função. No Método da Bissecção ele é calculado da seguinte forma: $x_m = \frac{a+b}{2}$.

Seguindo o indicado: $x_m = \frac{a+b}{2} \rightarrow x_m = \frac{1+3}{2} \rightarrow x_m = 2$.

Vamos, agora, verificar se $x_m = 2$ é um zero da função, substituindo-o em $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 5$.

$f(x_m) = f(2) = \frac{1}{2} + 2^2 - 5 \rightarrow f(2) = -0{,}5$.

Então $x = 2$ não é um zero da função, porque $|f(2)| = 0{,}5 > \varepsilon = 0{,}001$.

<u>2ª Iteração</u>: Para $x = 2$, $f(x) = f(2) = -0{,}5 < 0$ (negativo). Nesse caso, $x = 2$ deverá substituir $x = a$, pois $f(a)$ também é negativo. Essa

substituição sempre ocorre em função do sinal de $f(x)$.

Refazendo os cálculos com base nessas alterações, temos:

$a = 2$ e $f(a) = -0{,}50$;

$b = 3$ e $f(b) = 4{,}3333$;

então $x_m = \frac{a+b}{2} \rightarrow x_m = \frac{2+3}{2} \rightarrow x_m = 2{,}5$;

$f(x_m) = f(2{,}5) = \frac{1}{2{,}5} + 2{,}5^2 - 5 \rightarrow f(2{,}5) = 1{,}65$.

$x = 2{,}5$ também não é o zero da função, porque $|f(2{,}5)| = 1{,}65 > \varepsilon = 0{,}001$.

<u>**3ª Iteração**</u>: Para $x = 2{,}5$, $f(x) = f(2{,}5) = 1{,}65 > 0$ (positivo). Nesse caso, $x = 2{,}5$ deverá substituir $x = b$, pois $f(b)$ também é positivo.

Definimos novamente "a" e "b" para obter x_m:

$a = 2$ e $f(a) = -0{,}50$;

$b = 2{,}5$ e $f(b) = 1{,}65$;

então $x_m = \frac{a+b}{2} \rightarrow x_m = \frac{2+2{,}5}{2} \rightarrow x_m = 2{,}25$;

$f(x_m) = f(2{,}25) = \frac{1}{2{,}25} + 2{,}25^2 - 5 \rightarrow f(2{,}25) = 0{,}5069$.

Mais uma vez, $x = 2{,}25$ não é um zero da função, porque

$|f(2{,}25)| = 0{,}5069 > \varepsilon = 0{,}001$.

4ª Iteração: Como fizemos anteriormente, para $x = 2{,}5$, $f(x) = f(2{,}25) = 0{,}5069 > 0$ (positivo). Nesse caso, $x = 2{,}5$ deverá substituir $x = b$, pois $f(b)$ também é positivo.

Definimos novamente "a" e "b" para obter x_m:

$a = 2$ e $f(a) = -0{,}50$;

$b = 2{,}5$ e $f(b) = 0{,}5069$;

então $x_m = \frac{a+b}{2} \rightarrow x_m = \frac{2+2{,}25}{2} \rightarrow x_m = 2{,}125$;

$f(x_m) = f(2{,}125) = \frac{1}{2{,}125} + 2{,}125^2 - 5 \rightarrow f(2{,}125) = -0{,}0138$.

Portanto $x = 2{,}125$ é um zero da função, ou o valor de x que fará com que $f(x)$ seja igual a zero, pois $|f(2{,}125)| = 0{,}0138 > \varepsilon = 0{,}001$.

⋮ (Não foram apresentadas as iterações intermadiárias)

Continuando os cálculos:

Definimos novamente "a" e "b" para obter x_m:

$a = 2{,}125$ e $f(a) = -0{,}0138$;

$b = 2{,}1289$ e $f(b) = 0{,}0020$;

então $x_m = \frac{a+b}{2} \rightarrow x_m = \frac{2{,}125+2{,}1289}{2} \rightarrow x_m = 2{,}1270$;

$f(x_m) = f(2{,}1270) = \frac{1}{2{,}1270} + 2{,}1270^2 - 5 \rightarrow f(2{,}1270) = -0{,}0059$.

Mais uma vez, $x = 2{,}1270$ não é um zero da função, porque $|f(2{,}1270)| = 0{,}0059 > \varepsilon = 0{,}001$.

<u>10ª Iteração</u>: Como fizemos anteriormente, para $x = 2{,}1270$, $f(x) = f(2{,}1270) = -0{,}0059 > 0$ (negativo). Nesse caso, $x = 2{,}1270$ deverá substituir $x = a$, pois $f(a)$ também é negativo.

Definimos novamente "a" e "b" para obter x_m:

$a = 2{,}1270$ e $f(a) = -0{,}0059$;

$b = 2{,}1289$ e $f(b) = 0{,}0020$;

então $x_m = \frac{a+b}{2} \rightarrow x_m = \frac{2{,}1270+2{,}1289}{2} \rightarrow x_m = 2{,}1279$;

$f(x_m) = f(2{,}1279) = \frac{1}{2{,}1279} + 2{,}1279^2 - 5 \rightarrow f(2{,}1279) = -0{,}0020$.

Mais uma vez, $x = 2{,}1279$ não é um zero da função, porque $|f(2{,}1279)| = 0{,}0020 > \varepsilon = 0{,}001$.

<u>11ª Iteração</u>: Como fizemos anteriormente, para $x = 2{,}1279$, $f(x) = f(2{,}1279) = -0{,}0020 > 0$ (negativo). Nesse caso, $x = 2{,}1279$ deverá substituir $x = a$, pois $f(a)$ também é negativo.

Definimos novamente "a" e "b" para obter x_m:

$a = 2{,}12709$ e $f(a) = -0{,}0020$;

$b = 2{,}1289$ e $f(b) = 0{,}0020$;

então $x_m = \frac{a+b}{2} \rightarrow x_m = \frac{2{,}1279+2{,}1289}{2} \rightarrow x_m = 2{,}1284$;

$f(x_m) = f(2{,}1284) = \frac{1}{2{,}1284} + 84 - 5 \rightarrow f(2{,}1284) = -0{,}000004$.

Dessa vez, $x = 2{,}1284$ é um zero da função, porque $|f(2{,}1284)| = 0{,}000004 > \varepsilon = 0{,}001$.

Porém foram necessárias 11 iterações para obter a resposta do zero da função $x = 2{,}1284$.

Vamos resolver o mesmo problema usando a Tabela 2.1.

Tabela 2.1 | Passos para a determinação de um zero de $f(x)$ – método da bissecção

		$f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 5$			$f(x_m) = \frac{1}{x_m} + x_m^2 - 5$	Comentários
a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_m	$f(x_m)$	
1	3	–3	4,33	2	-0,5	Os valores a e b são determinados por visualização gráfica; $f(a)$ e $f(b)$ diferentes de zero; calculamos x_m e verificamos que $f(x_m) \neq 0$ e negativo.
2	3	–0,5	4,33	2,5	1,65	Como $f(x_m)$ do passo anterior é negativo, então a assume o valor de x_m porque $f(a)$ anterior é negativo. Aqui o novo x_m resultou em $f(x_m) \neq 0$.
2	2,5	–0,50	1,65	2,25	0,51	Nesse caso, $f(x_m)$ anterior é positivo, então b assume o valor de x_m porque $f(b)$ anterior é positivo. Aqui novamente x_m resultou em $f(x_m) \neq 0$.
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

2,125	2,1289	-0,0138	0,0020	2,1270	-0,0059	Mais uma vez, $x = 2{,}1270$ não é um zero da função, porque $\lvert f(2{,}1270)\rvert = 0{,}0059 > \varepsilon = 0{,}001$.
2,1270	2,1289	-0,0059	0,0020	2,1279	-0,0020	Mais uma vez, $x = 2{,}1279$ não é um zero da função, porque $\lvert f(2{,}1279)\rvert = 0{,}0020 > \varepsilon = 0{,}001$.
2,1279	2,1289	-0,0020	0,0020	**2,1284**	-0,000004	Dessa vez, $x = 2{,}1284$ é um zero da função, porque $\lvert f(2{,}1284)\rvert = 0{,}000004 > \varepsilon = 0{,}001$.

Faça você mesmo

Dada a função $f(x) = x^3 - x - 3$, determine o Zero da Função para o intervalo $I = [1{,}57;\ 1{,}79]$ para $\varepsilon = 0{,}05$.

Resposta: $\boldsymbol{x = 1{,}67}$

Sem medo de errar!

Com o conhecimento do Método da Bissecção, vamos resolver o problema da Suellen.

Suellen financiou um veículo de R$ 50000,00 em 48 parcelas mensais e iguais de R$ 4754,28. Ela necessita saber a taxa de juros utilizada no seu financiamento, podendo haver uma diferença menor ou igual a R$ 0,10 no valor da parcela; para poder orientar seu irmão que também deseja adquirir um veículo. Sabendo que a equação de cálculo de financiamento é dada por: $Valor\ da\ parcela = \dfrac{Valor\ de\ financiamento}{\left[\dfrac{1-(1+taxa\ de\ juros)^{-\ núm.\ de\ parcelas}}{taxa\ de\ juros}\right]}$; e a taxa de juros, no mercado para financiamento de veículos, varia entre 9% e 10% a.m., ela solicitou a ajuda de Carlos que determinou a taxa de juros pelo Método da Bissecção.

Vamos aplicar a resolução utilizada por Carlos:

Substituindo os valores na equação temos:

$$4754{,}28 = \frac{50000}{\left[\dfrac{1-(1+taxa\ de\ juros)^{-48}}{taxa\ de\ juros}\right]}$$

Solução:

Como desejamos descobrir a taxa de juros, vamos transformar a equação dada em função de taxa de juros:

$$f(taxa\ de\ juros) = 4754{,}28\left[\frac{1-(1+taxa\ de\ juros)^{-48}}{taxa\ de\ juros}\right] - 50000$$

Para maior compreensão, vamos adotar $x = taxa\ de\ juros$, então a função passa a ser escrita:

$$f(x) = 4754{,}28\left[\frac{1-(1+x)^{-48}}{x}\right] - 50000$$

a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_m	$f(x_m)$	$\varepsilon = \text{R\\$}\ 0{,}10$
0,09	0,10	1981,28	– 2947,24	0,095	- 596,87	$\lvert f(x_m)\rvert > \varepsilon$
0,09	0,095	1981,28	– 596,87	0,0925	661,90	$\lvert f(x_m)\rvert > \varepsilon$
0,0925	0,095	661,90	– 596,87	0,0938	0,02	$\lvert f(x_m)\rvert < \varepsilon$

Portanto a taxa de juros aplicada no financiamento de Suellen foi de 0,0938 a.m. = 9,38% a.m.

Veja que determinar um zero de $f(x)$ significa encontrar o valor da taxa de juros que soluciona a equação anterior. Resolvendo a equação, solucionamos o problema.

Atenção!

Faça uma revisão desse assunto acessando: <https://www.youtube.com/watch?v=vmhifjYi7mc>. Acesso em: 28 jul. 2015.

Lembre-se

No início da aplicação do método da bisseção, a condição $f(a) \cdot f(b) < 0$ implica em:

- Se $f(a) > 0$ então $f(b) < 0$; ou
- Se $f(b) > 0$ então $f(a) < 0$.

Isso garante a existência de um zero entre a e b.

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com a de seus colegas.	
Método da Bissecção	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer formas para calcular zeros de funções.
2. Objetivos de aprendizagem	Calcular os zeros de uma função.
3. Conteúdos relacionados	Zeros de funções.

<table>
<tr><td>4. Descrição da SP</td><td>Nos últimos anos, os verões, aqui no Brasil, têm sido muito rigorosos, com temperaturas muito acima do normal, fazendo com que a aquisição de aparelhos de ar-condicionado seja muito grande, e por consequência os seus preços atingem altas significativas, assim a aquisição desses aparelhos em sua grande maioria é realizada por financiamento. Um aparelho de ar-condicionado de 18000 Btus, cujo valor à vista é R$ 2100,00, é financiado em 10 parcelas mensais e iguais a R$ 297,06, com taxa de juros variando entre 6,43% a.m. e 7,34% a.m., gerando a função de taxa de juros $f(x)$:
$f(x) = 297{,}06\left[\frac{1-(1+x)^{-10}}{x}\right] - 2100$. Determine a taxa de juros aplicada na situação apresentada com $\varepsilon = \text{R\$ } 0{,}10$.</td></tr>
<tr><td>5. Resolução da SP</td><td>
<table>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>$f(a)$</th><th>$f(b)$</th><th>x_m</th><th>$f(x_m)$</th><th></th></tr>
<tr><td>0,0634</td><td>0,0743</td><td>51,60</td><td>−54,42</td><td>0,0689</td><td>−2,92</td><td></td></tr>
<tr><td>0,0634</td><td>0,0689</td><td>51,60</td><td>−2,92</td><td>0,0662</td><td>23,57</td><td></td></tr>
<tr><td>0,0662</td><td>0,0689</td><td>23,57</td><td>−2,92</td><td>0,0676</td><td>9,77</td><td></td></tr>
<tr><td>0,0676</td><td>0,0689</td><td>9,77</td><td>−2,92</td><td>0,0683</td><td>2,92</td><td></td></tr>
<tr><td>0,0683</td><td>0,0689</td><td>2,92</td><td>−2,92</td><td>0,0686</td><td>−0,005</td><td>$|-0{,}005| < \varepsilon$</td></tr>
<tr><td colspan="7">Portanto a taxa de juros aplicada é de 6,86% a.m.</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Lembre-se

O Método da Bisseção é utilizado para obter zeros de funções as quais não conseguimos obter por métodos analíticos, e $f(x)$ sempre terá valores muito próximos de zero. Para informar-se mais sobre o assunto, leia: <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap114s1.html>. Acesso em: 29 jul. 2015.

Faça você mesmo

Dada a função $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} - 6$, determine o Zero da Função para o intervalo $I = [2,3]$ e $\varepsilon = 0{,}01$.

Faça valer a pena!

1. Determine o zero da função $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x + 3$ existente entre os valores de 4,5 e 6 de x, com $\varepsilon = 0{,}05$ e assinale a alternativa correta.

a) $x = 4{,}96$.

b) $x = 4{,}86$.

c) $x = 5{,}97$.

d) $x = 9{,}47$.

e) $x = 5{,}99$.

2. Assinale a alternativa que indica o zero da função $f(x) = -\frac{1}{x^2} - x + 6$ existente entre os valores 5 e 8 de x, com $\varepsilon = 0{,}05$.

a) $x = 6{,}95$.

b) $x = 7{,}45$.

c) $x = 5{,}94$.

d) $x = 5{,}59$.

e) $x = 7{,}59$.

3. Determine o zero da função $g(x) = -\frac{30}{ln(x)} + 2x + 10$ existente entre os valores 4 e 5 de x, com $\varepsilon = 0{,}05$ e assinale a alternativa correta.

a) $x = 4{,}75$.

b) $x = 4{,}65$.

c) $x = 4{,}03$.

d) $x = 4{,}96$.

e) $x = 4{,}69$.

4. Determine o zero da função $r(t) = e^t + \left(ln(t)\right)^{-1} - 10$ existente entre os valores 2 e 3 de t, com $\varepsilon = 0{,}05$ e assinale a alternativa correta.

a) $t = 2{,}84$.

b) $t = 2{,}16$.

c) $t = 2{,}67$.

d) $t = 2{,}89$.

e) $t = 2{,}58$.

5. Assinale a alternativa que indica o zero da função $z(k) = \left(k^2 + 0{,}7k - 8\right)\left(k^2 + 2k - 35\right)^{-1}$ existente entre os valores -4 e -3 de k, com $\varepsilon = 0{,}01$.

a) $k = 3{,}25$.

b) $k = -3{,}52$.

c) $k = -3{,}15$.

d) $k = 3{,}532$.

e) $k = -3{,}25$.

6. Considerando a função $f(x) = 0{,}25x^4 + 2x^3 - 7{,}5x^2 + 3$, determine dois de seus zeros, um existente entre os valores 0 e 1,5, e o outro existente entre os valores $-1{,}51$ e 0 de x, com $\varepsilon = 0{,}10$.

7. Determine o zero da função $f(x) = x^2 - 2x^{-2/3} + 5$ existente entre os valores 0 e 1 de x, com $\varepsilon = 0{,}05$.

Seção 2.2

Método da falsa posição

Diálogo aberto

Na seção anterior, estudamos o método da Bissecção em que tivemos a oportunidade de ver que ele nos leva a uma resposta aproximada do zero de uma função, por meio da média aritmética dos extremos dos intervalos das iterações. Nesta seção, continuamos estudando a obtenção do zero de uma função, porém fazendo uso do Método da Falsa Posição que aplica a mesma técnica do método anterior, mas usando a média ponderada. A nossa situação problema continua sendo o problema da Suellen, mas que será resolvido pelo seu amigo Pedro que empregará o método da Falsa Posição.

Relembre o problema: Suellen financiou um veículo de R$ 50000,00 em 48 parcelas mensais e iguais de R$ 4754,28. Ela necessita saber a taxa de juros utilizada no seu financiamento, podendo haver uma diferença menor ou igual a R$ 0,10 no valor da parcela. Ao determinar a taxa de juros, ela poderá orientar seu irmão que também deseja adquirir um veículo. Sabendo que a equação de cálculo de financiamento é dada por: $Valor\ da\ parcela = \frac{Valor\ de\ financiamento}{\left[\frac{1-(1+taxa\ de\ juros)^{-\ núm.\ de\ parcelas}}{taxa\ de\ juros}\right]}$; e a taxa de juros, no mercado para financiamento de veículos, varia entre 9% e 10% a.m. Pedro, amigo de Suellen, ajudará na obtenção da taxa de juros utilizando o Método da Falsa Posição.

Coloque-se agora no lugar de Pedro: o que você precisa fazer para resolver o problema utilizando método da falsa posição?

Esperamos que ao final desta seção, você perceba que a técnica aplicada nesse método é a mesma da seção anterior; a mudança que ocorrerá é forma de calcular x_m.

Não pode faltar!

Método da Falsa Posição

Você verá que os conceitos iniciais são idênticos aos explorados na seção anterior. Nesse método, faremos uso da média ponderada dos extremos de cada intervalo das iterações, e a cada uma das iterações o intervalo diminui. O zero da função, que é o valor de x, tal que $f(x) = 0$, será a média ponderada dos extremos do último intervalo determinado, quando $|f(x_m)| \leq \varepsilon$.

O método de estudo novamente não nos fornecerá uma resposta x onde $f(x)$ será exatamente zero, mas próximo de zero.

Determinando o Zero da Função $f(x)$ num intervalo $I = [a, b]$, utilizando o critério de parada $|f(x_n)| \leq \varepsilon$, o método da falsa posição estabelece os seguintes passos:

Assimile

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$, garante a existência do Zero da Função entre a e b;

2. $x_m = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{f(a) - f(b)}$ (Aqui está a diferença entre os Métodos da Bisseção e Falsa Posição)

3. $|f(x_m)| \leq \varepsilon$, então x_m é o Zero da Função, e fim de cálculo

$|f(x_m)| > \varepsilon$, então x_m não é o Zero da Função, e deveremos prosseguir os cálculos da seguinte forma:

Se $|f(x_m)| < 0$ e $f(a) < 0$ então x_m deverá substituir a;

Se $|f(x_m)| < 0$ e $f(b) < 0$ então x_m deverá substituir b;

Se $|f(x_m)| > 0$ e $f(a) > 0$ então x_m deverá substituir a;

Se $|f(x_m)| > 0$ e $f(b) > 0$ então x_m deverá substituir b.

4. Após a determinação do novo intervalo, retornamos ao passo 2.

Esses passos são repetidos até que o critério de parada seja satisfeito.

Pesquise mais

Para ampliar seu conhecimento, acesse: <https://www.youtube.com/watch?v=QPdPv0Is-j4>. Acesso em: 24 jul. 2015.

Agora, veja um exemplo de aplicação do método da falsa posição:

Exemplificando

Dada a função $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 5$, determine o zero dessa função, ou a raiz, ou ainda, o valor que fará que ela, a função $f(x)$, seja igual a zero, no intervalo de x de 1 a 3, para $\varepsilon = 0{,}001$.

Vamos resolver:

<u>1ª Iteração</u>: $a = x = 1$ e $b = x = 3$

então:

$a = 1$;

$$f(a) = f(1) = \frac{1}{1} + 1^2 - 5 \rightarrow f(a) = -3$$

$b = 3$;

$$f(b) = f(3) = \frac{1}{3} + 3^2 - 5 \rightarrow f(a) = 4{,}3333$$

$$x_m = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{f(a) - f(b)} \rightarrow x_m = \frac{3 \cdot (-3) - 1 \cdot 4{,}3333}{-3 - 4{,}3333} \rightarrow x_m = 1{,}8182$$

$$f(x_m) = f(1{,}8182) = \frac{1}{1{,}8182} + 1{,}8182^2 - 5 \rightarrow f(x_m) = -1{,}1442$$

$$|f(x_m)| = 1{,}1442 > \varepsilon = 0{,}001$$

Como $|f(x_m)| = -1{,}1442 < 0$ então $x_m = 1{,}8182$ deverá substituir a, porque $f(a) = -3 < 0$.

2ª Iteração: Recomeçaremos os cálculos com $a = 1{,}8182$ e $b = 3$, então $f(a) = -1{,}1442$ e $f(b) = 4{,}3333$.

$$x_m = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{f(a) - f(b)} \rightarrow x_m = \frac{3 \cdot (-1{,}1442) - 1{,}8182 \cdot 4{,}3333}{-1{,}1442 - 4{,}3333} \rightarrow x_m = 2{,}0651$$

$$f(x_m) = f(2{,}0651) = \frac{1}{2{,}0651} + 2{,}0651^2 - 5 \rightarrow f(x_m) = -0{,}2513$$

$$|f(x_m)| = 0{,}2513 > \varepsilon = 0{,}001$$

3ª Iteração: Mais uma vez, teremos que recomeçar os cálculos. O valor $x_m = 2{,}0651$ substituirá o extremo a porque $f(x_m) = -0{,}2513 < 0$ e $f(a) = -1{,}1442 < 0$.

$a = 2{,}0651$ e $b = 3$; $f(a) = -0{,}2513$ e $f(b) = 4{,}3333$

$$x_m = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{f(a) - f(b)} \rightarrow x_m = \frac{3 \cdot (-0{,}2513) - 2{,}0651 \cdot 4{,}3333}{-0{,}2513 - 4{,}3333} \rightarrow x_m = 2{,}1163$$

$$f(x_m) = f(2{,}1163) = \frac{1}{2{,}1163} + 2{,}1163^2 - 5 \rightarrow f(x_m) = -0{,}0487$$

$$|f(x_m)| = 0{,}0487 > \varepsilon = 0{,}001$$

4ª Iteração: Novamente teremos de reiniciar os cálculos, com $a = 2{,}1163$, $b = 3$, $f(a) = -0{,}0487$ e $f(b) = 4{,}3333$

$$x_m = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{f(a) - f(b)} \rightarrow x_m = \frac{3 \cdot (-0{,}0487) - 2{,}1163 \cdot 4{,}3333}{-0{,}0487 - 4{,}3333} \rightarrow x_m = 2{,}1261$$

$$f(x_m) = f(2{,}1261) = \frac{1}{2{,}1261} + 2{,}1261^2 - 5 \rightarrow f(x_m) = -0{,}0092$$

$$|f(x_m)| = 0{,}0092 > \varepsilon = 0{,}001$$

5ª. Iteração: Novamente teremos de reiniciar os cálculos, com $a = 2{,}1261$, $b = 3$, $f(a) = -0{,}0092$ e $f(b) = 4{,}3333$

$$x_m = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{f(a) - f(b)} \rightarrow x_m = \frac{3 \cdot (-0{,}0092) - 2{,}1261 \cdot 4{,}3333}{-0{,}0092 - 4{,}3333} \rightarrow x_m = 2{,}1280$$

$$f(x_m) = f(2{,}1280) = \frac{1}{2{,}1280} + 2{,}1280^2 - 5 \rightarrow f(x_m) = -0{,}0017$$

$$|f(x_m)| = 0{,}0017 > \varepsilon = 0{,}001$$

<u>6ª Iteração</u>: Novamente teremos de reiniciar os cálculos, com $a = 2{,}1280$, $b = 3$, $f(a) = -0{,}0017$ e $f(b) = 4{,}3333$

$$x_m = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{f(a) - f(b)} \rightarrow x_m = \frac{3 \cdot (-0{,}0017) - 2{,}1280 \cdot 4{,}3333}{-0{,}0017 - 4{,}3333} \rightarrow x_m = 2{,}1283$$

$$f(x_m) = f(2{,}1283) = \frac{1}{2{,}1283} + 2{,}1283^2 - 5 \rightarrow f(x_m) = -0{,}0003$$

$$|f(x_m)| = 0{,}0003 < \varepsilon = 0{,}001$$

Portanto $\boldsymbol{x = 2{,}1283}$ é o zero da função; nesse método foram necessárias seis iterações para se obter a resposta, enquanto que no método da Bisseção, estudado na seção anterior, foram necessários onze iterações, podemos dizer que o método da Falsa Posição apresenta uma convergência mais rápida.

O termo convergência, no estudo zeros de uma função, significa que a cada iteração $f(x)$ se aproxima de zero; e a velocidade de convergência está correlacionada ao número de iterações necessárias para atingir o zero da função, quanto menor o número de iterações. Maior a velocidade de convergência, quanto maior o número de iterações menor a velocidade de convergência.

Resolvendo com auxílio de tabela:

Tabela 2.2| Passos para a determinação de um zero de $f(x)$ – método da falsa posição

		$f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 5$			$f(x_m) = \frac{1}{x_m} + x_m^2 - 5$	
a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_m	$f(x_m)$	Comentários
1	3	-3	4,3333	1,8182	-1,1442	$\lvert f(x_m)\rvert = 1{,}1442 > \varepsilon = 0{,}001$ Como $f(x_m) = -1{,}1442 < 0$ então $x_m = 1{,}8182$ deverá substituir a, porque $f(a) = -3 < 0$.

1,8182	3	-1,1442	4,3333	2,0651	-0,2513	$\|f(x_m)\| = 0,2513 > \varepsilon = 0,001$. Mais uma vez teremos que recomeçar os cálculos. O valor $x_m = 2,0651$ substituirá o extremo a porque $f(x_m) = -0,2513 < 0$ e $f(a) = -1,1442 < 0$.
2,0651	3	-0,2513	4,3333	2,1163	-0,0487	$\|f(x_m)\| = 0,0487 > \varepsilon = 0,001$. Novamente teremos de reiniciar os cálculos, com $a = 2,1163$, $b = 3$, $f(a) = -0,0487$ e $f(b) = 4,3333$
2,1163	3	-0,04874	4,3333	2,1261	-0,0092	$\|f(x_m)\| = 0,0092 > \varepsilon = 0,001$. Novamente teremos de reiniciar os cálculos, com $a = 2,1261$, $b = 3$, $f(a) = -0,0092$ e $f(b) = 4,3333$
2,1261	3	-0,00923	4,3333	2,1280	-0,0017	$\|f(x_m)\| = 0,0017 > \varepsilon = 0,001$. Novamente teremos de reiniciar os cálculos, com $a = 2,1280$, $b = 3$, $f(a) = -0,0017$ e $f(b) = 4,3333$
2,1280	3	-0,0020	4,3333	**2,1283**	-0,0003	$\|f(x_m)\| = 0,0003 > \varepsilon = 0,001$. **Portanto $\boldsymbol{x = 2,1283}$ é o zero da função.**

Faça você mesmo

Dada a função $f(x) = x^3 - x - 3$, determine o Zero da Função para o intervalo $I = [1,57;\ 1,79]$ e $\varepsilon = 0,05$, utilizando o Método da Falsa Posição.

Sem medo de errar

Como aprendemos o Método da Falsa Posição, então veja como Pedro deve resolver o problema da Suellen.

Suellen financiou um veículo de R$ 50000,00 em 48 parcelas mensais e iguais de R$ 4754,28. Ela necessita saber a taxa de juros utilizada no seu financiamento, podendo haver uma diferença menor ou igual a R$ 0,10 no valor da parcela. Conhecendo a taxa de juros, ela poderá orientar seu irmão que também deseja adquirir um veículo. Sabendo que a equação de cálculo de financiamento é dada por: $Valor\ da\ parcela = \frac{Valor\ de\ financiamento}{\left[\frac{1-(1+taxa\ de\ juros)^{-\ \text{núm.}\ de\ parcelas}}{taxa\ de\ juros}\right]}$; e a taxa de juros, no mercado para financiamento de veículos, varia entre 9% e 10% a.m. Pedro, amigo de Suellen ajudou na obtenção da taxa de juros utilizando o Método da Falsa Posição.

A função da taxa de juros é mesma desenvolvida na seção anterior:

$$f(x) = 4754{,}28\left[\frac{1-(1+x)^{-48}}{x}\right] - 50000.$$

a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_m	$f(x_m)$	
0,09	0,1	1981,279	−2947,24	0,09402003	−110,423	
0,09	0,094	1981,279	−100,39	0,0938071	−3,5513	
0,09	0,09381	1981,279	−5,01159	0,0938004	−0,17695	
0,09	0,0938004	1981,279	-0,18348	0,0938000	-0,00648	$\lvert f(x_m)\rvert = 0{,}006 < \varepsilon = R\$\ 0{,}10$

Portanto, a taxa de juros aplicada no financiamento de Suellen foi de 0,0938 a.m. = 9,38% a.m., Carlos e Pedro chegaram a mesma conclusão, fazendo uso de métodos diferentes, Método da Bissecção e Método da Falsa Posição.

O Método da Falsa Posição, com relação ao Método da Bissecção, na maioria dos casos, converge mais rápido; no caso em que estamos estudando, ele convergiu com uma iteração a mais, mas foi mais preciso.

Lembre-se

No Método da Falsa Posição:

$$x_m = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{f(a) - f(b)}$$

Pesquise mais

Quanto mais você pesquisar e ler sobre o assunto, maior será sua compreensão. Por isso, acesse: <http://www.di.ubi.pt/~cbarrico/Disciplinas/ComputacaoCientifica/Downloads/Capitulo%202%20-%20Metodos%20Numericos.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2015.

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com a de seus colegas.	
"Método da Falsa Posição"	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer formas para calcular zeros de funções.
2. Objetivos de aprendizagem	Calcular os zeros de uma função.
3. Conteúdos relacionados	Zeros de funções.
4. Descrição da SP	Nos últimos anos, os verões, aqui no Brasil, têm sido muito rigorosos, com temperaturas muito acima do normal, fazendo com que a aquisição de aparelhos de ar-condicionado seja muito grande, e por consequência os seus preços atingem altas significativas, assim a aquisição desses aparelhos em sua grande maioria é realizada por financiamento. Um aparelho de ar-condicionado de 18000 Btus, cujo valor à vista é R$ 2100,00, é financiado em 10 parcelas mensais e iguais a R$ 297,06, com taxa de juros variando entre 6,43% a.m. e 7,34% a.m., gerando a função de taxa de juros $f(x)$: $f(x) = 297{,}06\left[\frac{1-(1+x)^{-10}}{x}\right] - 2100$. Determine a taxa de juros aplicada na situação apresentada com $\varepsilon = \text{R\\$}\ 0{,}10$.

5. Resolução da SP

Nesse caso, a taxa de juros, que desejamos determinar, é o Zero da Função, então aplicaremos as teorias apresentadas nesta seção:

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$, garante a existência do Zero da Função entre a e b;
2. $x_m = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{f(a) - f(b)}$ (Aqui está a diferença entre os Métodos da Bisseção e Falsa Posição)
3. $|f(x_m)| \leq \varepsilon$, então x_m é o Zero da Função, e fim de cálculo

   $|f(x_m)| > \varepsilon$, então x_m não é o Zero da Função, e deveremos prosseguir os cálculos da seguinte forma:

   Se $f(x_m) < 0$ e $f(a) < 0$ então x_m deverá substituir a;

   Se $f(x_m) < 0$ e $f(b) < 0$ então x_m deverá substituir b;

   Se $f(x_m) > 0$ e $f(a) > 0$ então x_m deverá substituir a;

   Se $f(x_m) > 0$ e $f(b) > 0$ então x_m deverá substituir b.
4. Após a determinação do novo intervalo, retornamos ao passo 2.

Esses passos são repetidos até que o critério de parada seja satisfeito.

a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_m	$f(x_m)$
0,0634	0,0734	51,59545	-45,9753	0,0687	-0,98
0,0634	0,0687	51,59545	-0,9791	0,0686	-0,005

A taxa de juros aplicada na situação apresentada é de 6,86% a.m.

Lembre-se

O Método da Falsa Posição é muito parecido com Método da Bissecção, eles se diferem pela forma de calcular x_m, na Bissecção é efetuada a média aritmética e na Falsa Posição calcula-se a média ponderada. Para aprofundar-se no assunto, leia: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v10n3/16.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2015.

Faça você mesmo

Dada a função $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} - 6$, determine o Zero da Função para o intervalo $I = [2,3]$ e $\varepsilon = 0{,}01$.

Faça valer a pena

Resolva exercícios a seguir aplicando o Método da Falsa Posição.

1. Determine o zero da função $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x + 3$ existente entre os valores de 4, 5 e 6 de x, com $\varepsilon = 0{,}05$ e assinale a alternativa correta.

a) $x = 4{,}96$.

b) $x = 4{,}86$.

c) $x = 5{,}97$.

d) $x = 9{,}47$.

e) $x = 5{,}99$.

2. Assinale a alternativa que indica o zero da função $f(x) = -\frac{1}{x^2} - x + 6$ existente entre os valores 5 e 8 de x, com $\varepsilon = 0{,}05$.

a) $x = 6{,}95$.

b) $x = 7{,}45$.

c) $x = 5{,}97$.

d) $x = 5{,}59$.

e) $x = 7{,}59$.

3. Determine o zero da função $g(x) = -\frac{30}{ln(x)} + 2x + 10$ existente entre os valores 4 e 5 de x, com $\varepsilon = 0{,}05$ e assinale a alternativa correta.

a) $x = 4{,}75$.

b) $x = 4{,}65$.

c) $x = 4{,}03$.

d) $x = 4{,}96$.

e) $x = 4{,}70$.

4. Determine o zero da função $r(t) = e^t + \left(ln(t)\right)^{-1} - 10$ existente entre os valores 2 e 3 de t, com $\varepsilon = 0{,}05$ e assinale a alternativa correta.

a) $t = 2{,}84$.

b) $t = 2{,}16$.

c) $t = 2{,}67$.

d) $t = 2{,}89$.

e) $t = 2{,}58$.

5. Assinale a alternativa que indica o zero da função $z(k) = \left(k^2 + 0{,}7k - 8\right)\left(k^2 + 2k - 35\right)^{-1}$ existente entre os valores -4 e -3 de k, com $\varepsilon = 0{,}01$.

a) $k = 3{,}25$.

b) $k = -3{,}52$.

c) $k = -3{,}15$.

d) $k = 3{,}532$.

e) $k = -3{,}25$.

6. Considerando a função $f(x) = 0{,}25x^4 + 2x^3 - 7{,}5x^2 + 3$, determine dois de seus zeros, um existente entre os valores 0 e 1,5, e o outro existente entre os valores $-1{,}51$ e 0 de x, com $\varepsilon = 0{,}10$.

7. Determine o zero da função $f(x) = x^2 - 2x^{-2/3} + 5$ existente entre os valores 0 e 1 de x, com $\varepsilon = 0{,}05$.

Seção 2.3

Método iterativo linear

Diálogo aberto

Nesta seção, prezado aluno, novamente iremos tratar sobre Zero da Função, porém aprenderemos determiná-lo pelo Método Iterativo Linear (MIL), também conhecido como Método do Ponto Fixo (MPF); esse método tem como vantagem, em relação aos métodos anteriores (Bissecção e Falsa Posição), a velocidade de convergência, ou seja, o quão rápido nos aproximamos do zero da função. Vale ressaltar que o uso desse método deve ser evitado em funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

O Método Iterativo Linear, também como os métodos estudados nas seções anteriores, fornece-nos um $f(x)$ muito próximo de zero, mas não exatamente zero.

O problema de estudo ainda será o problema da Suellen que deseja saber a taxa de juros imposta no financiamento da compra de seu veículo e outro amigo, José, ajudará a determinar essa taxa fazendo o uso do Método Iterativo Linear (MIL).

Você deverá colocar-se no lugar de José, sendo assim: o que será necessário para que tenha condições de resolver o problema proposto utilizando o Método Iterativo Linear (MIL)?

Acreditamos que ao término desta seção você perceba que uma das diferenças desse método é a necessidade da função iterativa, que não houve nos anteriores e que, em alguns casos, ele converge mais rápido.

Não pode faltar

Método Iterativo Linear (MIL)

Seja uma função $f(x)$ da qual desejamos conhecer x para o qual $f(x) = 0$, ou seja, desejamos conhecer o zero dessa função num intervalo $I = [a, b]$. E nesse intervalo I existe o zero da função porque $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, ou $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$.

Para determinar o Zero da Função $f(x)$ num intervalo $I = [a, b]$, para $|f(x_n)| \leq \varepsilon$, pelo MIL devemos:

Assimile

1. $f(x)$ tem que ser transformado em $f(x) = g(x) - x$,

onde $g(x)$ é chamada função iterativa;

2. Se $f(x) = 0$

então, substituindo $f(x)$ por zero em $f(x) = g(x) - x$,

podemos dizer que $0 = g(x) - x$

e assim $x = g(x)$;

3. Com isso determinamos:

$x_{n+1} = g(x_n)$ → Função Iterativa;

4. Vamos iniciar os cálculo por a, sendo $a = x_o$, onde x_0 é um valor atribuído pelo pesquisador, que é um "chute" direcionado para ser o mais próximo quanto possível do zero. Então calculamos $f(x_0)$;

5. Se $|f(x_0)| \leq \varepsilon$ então x_0 é o zero da função;

6. Se $|f(x_0)| > \varepsilon$ então x_0 não é o zero da função; desse modo, continuaremos os cálculos fazendo uso de x_1, onde;

7. x_1 é obtido utilizando a equação $x_{n+1} = g(x_n)$, ficando dessa forma $x_1 = g(x_0)$;

8. Tendo x_1, calculamos $f(x_1)$;

9. Se $|f(x_1)| \leq \varepsilon$ então x_1 é o zero da função;

10. Se $|f(x_1)| > \varepsilon$ então x_1 não é o zero da função e, mais uma vez, continuaremos os cálculos fazendo uso de x_2, onde;

11. x_2 é obtido utilizando a equação $x_{n+1} = g(x_n)$, ficando dessa forma $x_2 = g(x_1)$;

12. Tendo x_2, calculamos $f(x_2)$;

13. Se $|f(x_2)| \leq \varepsilon$ então x_2 é o zero da função;

14. Se $|f(x_2)| > \varepsilon$ então x_2 não é o zero da função e, mais uma vez, continuaremos os cálculos fazendo uso de x_3;

15. Essa sequência deve ser repetida até que $|f(x_n)| \leq \varepsilon$. Enquanto $|f(x_n)| > \varepsilon$ retornamos ao passo 7.

Pesquise mais

Para que você possa ter maior compreensão, leia: <http://www1.univap.br/spilling/CN/apostila2.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2015.

Agora veja um exemplo de aplicação do Método Iterativo Linear:

Exemplificando

Dada $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 5$, determine o zero dessa função, ou as raízes, ou ainda o valor que fará ela, a função $f(x)$, igual a zero, para $\varepsilon = 0{,}001$, no intervalo de 1 a 3 de x.

Vamos realizar os procedimentos passo a passo para compreender a aplicação da teoria:

- $f(x)$ tem que ser transformada em $f(x) = g(x) - x$:

Se $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 5$ e nossa intenção é $f(x) = 0$ então,

$$\frac{1}{x} + x^2 - 5 = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{1}{x} + 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{1}{x} + 5};$$

Assim, $g(x) = \pm\sqrt{-\frac{1}{x} + 5}$ atende à condição $x = g(x)$.

- Com isso determinamos:

$$x_{n+1} = g(x_n) \rightarrow \text{Função Iterativa;}$$

$$x_{n+1} = \sqrt{-\frac{1}{x_n} + 5}.$$

<u>**1ª Iteração**</u>: Vamos iniciar os cálculos com $x_o = 2$, o valor médio dos

extremos do intervalo dado, e então calculamos $f(x_0)$, sendo $x_o = 2$, temos:

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n} + x_n^2 - 5 \to f(x_0) = \frac{1}{x_0} + x_0^2 - 5 \to f(1) = \frac{1}{2} + 2^2 - 5;$$

$$f(x_0) = f(2) = -0{,}5.$$

Se $|f(x_0)| > \varepsilon$ então x_0 não é o zero da função e continuaremos os cálculos fazendo uso de x_1;

$|f(x_0)| = -0{,}5 > \varepsilon = 0{,}001$, então continuaremos os cálculos fazendo uso de x_1, onde;

<u>2ª. Iteração</u>: x_1 é obtido utilizando a equação $x_{n+1} = g(x_n)$, ficando dessa forma $x_1 = g(x_0)$:

$$x_{n+1} = g(x_n) \to x_{n+1} = \sqrt{-\frac{1}{x_n} + 5};$$

$$x_1 = g(x_0) \to x_1 = \sqrt{-\frac{1}{x_0} + 5} \to x_1 = \sqrt{-\frac{1}{2} + 5} \to x_1 = 2{,}1213;$$

Calculamos $f(x_1)$;

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1} + x_1^2 - 5 \to f(2{,}1213) = \frac{1}{2{,}1213} + 2{,}1213^2 - 5$$

$$f(2{,}1213) = \frac{1}{2{,}1213} + 2{,}1213^2 - 5;$$

$$f(x_1) = f(2{,}1213) = -0{,}0286.$$

Se $|f(x_1)| > \varepsilon$ então x_0 não é o zero da função e continuaremos os cálculos fazendo uso de x_2;

$|f(x_1)| = -0{,}0286 > \varepsilon = 0{,}001$ então continuaremos os cálculos fazendo uso de x_2, onde;

<u>3ª Iteração</u>: x_2 é obtido utilizando a equação $x_{n+1} = g(x_n)$, ficando dessa forma $x_2 = g(x_1)$:

$$x_{n+1} = g(x_n) \to x_{n+1} = \sqrt{-\frac{1}{x_n} + 5};$$

$$x_2 = g(x_1) \to x_2 = \sqrt{-\frac{1}{2{,}1213} + 5} \to x_2 = \sqrt{-\frac{1}{2{,}1213} + 5} \to x_2 = 2{,}1281;$$

Calculamos $f(x_2)$;

$$f(x_2) = \frac{1}{x_2} + x_2^2 - 5 \rightarrow f(2{,}12) = \frac{1}{2{,}1281} + 2{,}1281^2 - 5$$

$$f(2{,}1281) = \frac{1}{2{,}1281} + 2{,}1281^2 - 5;$$

$f(x_2) = f(2{,}1281) = -0{,}0015$.

Se $|f(x_2)| > \varepsilon$ então x_2 não é o zero da função e continuaremos os cálculos fazendo uso de x_3;

$|f(x_2)| = 0{,}0015 < \varepsilon = 0{,}001$ então continuaremos os cálculos fazendo uso de x_3, onde;

<u>**4ª Iteração**</u>: x_3 é obtido utilizando a equação $x_{n+1} = g(x_n)$, ficando dessa forma $x_3 = g(x_2)$:

$$x_{n+1} = g(x_n) \rightarrow x_{n+1} = \sqrt{-\frac{1}{x_n} + 5};$$

$$x_3 = g(x_2) \rightarrow x_3 = \sqrt{-\frac{1}{x_2} + 5} \rightarrow x_3 = \sqrt{-\frac{1}{2{,}1281} + 5} \rightarrow x_3 = 2{,}1284;$$

Calculamos $f(x_3)$;

$$f(x_3) = \frac{1}{x_3} + x_3^2 - 5 \rightarrow f(2{,}1284) = \frac{1}{2{,}1284} + 2{,}1284^2 - 5$$

$$f(2{,}1284) = \frac{1}{2{,}1284} + 2{,}1284^2 - 5;$$

$f(x_3) = f(2{,}1284) = -0{,}0001$.

Se $|f(x_n)| \leq \varepsilon$ então x_n é o zero da função:

$|f(x_3)| = 0{,}0001 < \varepsilon = 0{,}001$.

Portanto $x_3 = 2{,}1284$ é o zero da função.

Observando o número de iterações realizadas nos métodos das seções anteriores, 2.1 e 2.2, para esse tipo de problemas, o MIL apresenta uma velocidade de convergência maior, pois apresentou quatro iterações.

Agora resolveremos o mesmo problema fazendo uso de uma tabela, a Tabela 2.3.

Tabela 2.3 | Passos para a determinação de um zero de $f(x)$ – Método Iterativo Linear

x_n		$f(x_n) = \frac{1}{x_n} + x_n^2 - 5$	Comentários	$x_{n+1} = \sqrt{-x_n^2 + 5}$	
		f (x_n)		X_{n+1}	
x_0	2	-0,5000	$\lvert f(x_0)\rvert = 0{,}5 > \varepsilon = 0{,}001$ então continuaremos os cálculos fazendo uso de $\boldsymbol{x_1}$	2,1213	X_1
x_1	2,1213	-0,0286	$\lvert f(x_1)\rvert = 0{,}0286 > \varepsilon = 0{,}001$ então continuaremos os cálculos fazendo uso de $\boldsymbol{x_2}$	2,1281	X_2
x_2	2,1281	-0,0015	$\lvert f(x_2)\rvert = 0{,}0015 > \varepsilon = 0{,}001$ então continuaremos os cálculos fazendo uso de $\boldsymbol{x_3}$	2,1284	X_3
x_3	2,1284	-0,0001	$\lvert f(x_3)\rvert = 0{,}0001 > \varepsilon = 0{,}001$ e fim dos cálculos. Portanto $\boldsymbol{x_3} = \mathbf{2{,}13}$ é o zero da função.		

Faça você mesmo

Determine o Zero da Função pelo Método Iterativo Linear para $f(x) = x^3 - x - 3$, no intervalo $I = [1{,}57;\ 1{,}79]$ para $\varepsilon = 0{,}05$.

Sem medo de errar

Tendo o conhecimento do Método Iterativo Linear, então veja como José deve resolver o problema da Suellen.

Suellen financiou um veículo de R$ 50000,00 em 48 parcelas mensais e iguais de R$ 4754,28. Ela necessita saber a taxa de juros utilizada no seu financiamento, podendo haver uma diferença menor ou igual a R$ 0,10 no valor da parcela; para poder orientar seu irmão que também deseja adquirir um veículo. Sabendo que a equação de cálculo de financiamento é dada por: $Valor\ da\ parcela = \frac{Valor\ de\ financiamento}{\left[\frac{1-(1+taxa\ de\ juros)^{-\ núm.\ de\ parcelas}}{taxa\ de\ juros}\right]}$; e a taxa de juros, no mercado para financiamento de veículos, varia entre 9% e 10% a.m., ela solicitou a ajuda de José que utilizou o Método Iterativo Linear para determinar a resposta solicitada.

Sendo a função da taxa de juros a mesma vista nas seções anteriores:

$$f(x) = 4754{,}28\left[\frac{1-(1+x)^{-48}}{x}\right] - 50000.$$

Vamos determinar a função iterativa $g(x) = x$:

$$f(x) = 0;$$

$$4754{,}28\left[\frac{1-(1+x)^{-48}}{x}\right] - 50000 = 0 \rightarrow \frac{4754{,}28-4754{,}28(1+x)^{-48}-50000x}{x} = 0;$$

$$4754{,}28 - 4754{,}28(1+x)^{-48} - 50000x = 0 \rightarrow 50000x = 4754{,}28 - 4754{,}28(1+x)^{-48};$$

$$x = \frac{4754{,}28-4754{,}28(1+x)^{-48}}{50000} \rightarrow x = g(x).$$

Então:

$$f(x_n) = 4754{,}28\left[\frac{1-(1+x_n)^{-48}}{x_n}\right] - 50000;$$

$$x_{n+1} = g(x_n) \rightarrow x_{n+1} = \frac{4754{,}28-4754{,}28(1+x_n)^{-48}}{50000}.$$

Inicialmente faremos $x_0 = a = 0{,}09$

x_n		$f(x_n) = 4754{,}28\left[\frac{1-(1+x_n)^{-48}}{x_n}\right] - 50000$	Comentários	$x_{n+1} = \frac{4754{,}28 - 4754{,}28(1+x_n)^{-48}}{50000}$	
		$f(x_n)$		x_{n+1}	
x_0	0,09	1981,28	$\lvert f\,(x_0)\rvert = 1981{,}28 > \varepsilon = 0{,}10$ então continuaremos os cálculos fazendo uso de x_1	0,0936	x_1
x_1	0,0936	100,80	$\lvert f(x_1)\rvert = 100{,}80 > \varepsilon = 0{,}10$ então continuaremos os cálculos fazendo uso de x_2	0,0938	x_2

x_2	0,0938	0,02	$\|f(x_2)\| = 0{,}02 > \varepsilon = 0{,}10$ Portanto x_2 = **9,38% *a.m.*** é o zero da função.		

Agora faremos com $x_0 = b = 0{,}10$, com o intuito de demonstrar que se pode iniciar por $\boldsymbol{a}$ ou por $\boldsymbol{b}$.

x_n		$f(x_n) = 4754{,}28\left[\frac{1-(1+x_n)^{-48}}{x_n}\right] - 50000$	Comentários	$x_{n+1} = \frac{4754{,}28 - 4754{,}28(1+x_n)^{-48}}{50000}$	
		f (x_n)		X_{n+1}	
x_0	0,10	−2947,24	$\|f(x_0)\| = 2947{,}24 > \varepsilon = 0{,}10$ então continuaremos os cálculos fazendo uso de x_1	0,0941	x_1
x_1	0,0941	−150,45	$\|f(x_1)\| = 150{,}45 > \varepsilon = 0{,}10$ então continuaremos os cálculos fazendo uso de x_2	0,0938	x_2
x_2	0,0938	0,02	$\|f(x_2)\| = 0{,}02 < \varepsilon$ Portanto x_2 = **9,38% *a.m.*** é o zero da função.		

José também chegou a mesma de taxa de juros que Carlos e Pedro; no valor de 9,83% a.m. e cada um deles aplicou um método diferente. Foi possível observar que o Método Iterativo Linear, com três iterações, convergiu mais rápido que os Métodos da Bissecção (quatro iterações) e o da Falsa Posição (cinco iterações).

Atenção!

Para o seu melhor entendimento, leia: <http://www1.univap.br/spilling/CN/apostila2.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2015.

Lembre-se

1. $f(x)$ tem que ser transforma em $f(x) = g(x) - x$,

onde $g(x)$ é chamada função iterativa.

2. Se $f(x) = 0$,

então, substituindo $f(x)$ por zero em $f(x) = g(x) - x$,

podemos dizer que $0 = g(x) - x$

e assim $x = g(x)$.

3. Com isso determinamos:

$x_{n+1} = g(x_n)$ → Função Iterativa;

Vamos iniciar os cálculos por x_o, e então calculamos $f(x_0)$.

Os cálculos prosseguem até que o critério de parada seja satisfeito.

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com a de seus colegas.	
Determinando o zero pelo método iterativo linear	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer formas para calcular zeros de funções.
2. Objetivos de aprendizagem	Calcular os zeros de uma função.
3. Conteúdos relacionados	Zeros de funções.
4. Descrição da SP	Nos últimos anos, os verões, aqui no Brasil, têm sido muito rigorosos, com temperaturas muito acima do normal, fazendo com que a aquisição de aparelhos de ar-condicionado seja muito grande, e por consequência os seus preços atingem altas significativas, assim a aquisição desses aparelhos em sua grande maioria é realizada por financiamento. Um aparelho de ar-condicionado de 18000 Btus, cujo valor à vista é R$ 2100,00, é financiado em 10 parcelas mensais e iguais a R$ 297,06, com taxa de juros variando entre 6,43% a.m. e 7,34% a.m., gerando a função de taxa de juros $f(x)$: $f(x) = 297{,}06\left[\frac{1-(1+x)^{-10}}{x}\right] - 2100$. Determine a taxa de juros aplicada na situação apresentada com $\varepsilon = \text{R\\$ } 0{,}10$, aplicando o Método Iterativo Linear.

5. Resolução da SP

Neste caso, a taxa de juros que desejamos determinar é o Zero da Função, então aplicaremos as teorias apresentadas nessa seção:

x_n		$f(x_n) = 297{,}06\left[\frac{1-(1+x)^{-10}}{x_n}\right] - 2100$	$x_{n+1} = \frac{297{,}06 - 297{,}0(1+x_n)^{-10}}{2100}$	
		$f(x_n)$	x_{n+1}	
x_0	0,0643	42,53	0,0656	x_1
x_1	0,0656	29,53	0,0665	x_2
x_2	0,0665	20,60	0,0672	x_3
x_3	0,0672	13,70	0,0676	x_4
x_4	0,0676	9,77	0,0679	x_5
x_5	0,0679	6,83	0,0681	x_6
x_6	0,0681	4,87	0,0683	x_7
x_7	0,0683	2,91	0,0684	x_8
x_8	0,0684	1,94	0,0685	x_9
x_9	0,0685	0,97	0,06853	x_{10}
x_{10}	0,06853	0,68	0,0686	x_{11}
x_{11}	0,0686	0,005	$\|f(x_{11})\| < \varepsilon$	

Portanto, a taxa de juros aplicada é de 6,86% a.m.

Faça você mesmo

Determine o zero da função $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} - 6$, pelo MIL no intervalo $I = [2{,}3]$, para $\varepsilon = 0{,}01$.

Faça valer a pena

Resolva as atividades a seguir aplicando o Método Iterativo Linear.

1. Determine o zero da função $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x + 3$ existente entre os valores de 4, 5 e 6 de x, com $\varepsilon = 0{,}05$ e assinale a alternativa correta.

a) $x = 4{,}96$.

b) $x = 4{,}86$.

c) $x = 5{,}97$.

d) $x = 9{,}47$.

e) $x = 5{,}99$.

2. Assinale a alternativa que indica o zero da função $f(x) = -\frac{1}{x^2} - x + 6$ existente entre os valores 5 e 8 de x, com $\varepsilon = 0{,}05$.

a) $x = 6{,}95$.

b) $x = 7{,}45$.

c) $x = 5{,}94$.

d) $x = 5{,}97$.

e) $x = 7{,}59$.

3. Determine o zero da função $g(x) = -x^3 + 2x + 9$ existente entre os valores 2 e 3 de x, com $\varepsilon = 0{,}05$ e assinale a alternativa correta.

a) $x = 2{,}75$.

b) $x = 2{,}65$.

c) $x = 2{,}03$.

d) $x = 2{,}40$.

e) $x = 2{,}69$.

4. Determine o zero da função $r(t) = \frac{1}{t^3} + t^2 - 15$ existente entre os valores -4 e -3 de t, com $\varepsilon = 0{,}01$ e assinale a alternativa correta.

a) $t = -3{,}284$.

b) $t = -3{,}875$.

c) $t = -3{,}670$.

d) $t = -3{,}890$.

e) $t = -3{,}587$.

5. Assinale a alternativa que indica o zero da função $z(k) = k^5 + k - 15$ existente entre os valores 1 e 2 de k, com $\varepsilon = 0{,}01$.

a) $k = 1{,}678$.

b) $k = 1{,}876$.

c) $k = 1{,}768$.

d) $k = 1{,}687$.

e) $k = 1{,}786$.

6. Considerando a função $f(x) = 3x^4 + 2x + 3$, determine o zero da função existente entre os valores 0 e 1 de x, com $\varepsilon = 0{,}01$.

7. Determine o zero da função $f(x) = x - 2x^{-2/3} + 5$ existente entre os valores 0,1 e 1 de x, com $\varepsilon = 0{,}01$.

Seção 2.4

Método de Newton-Raphson

Diálogo aberto

Prezado aluno, nesta seção, fechamos o assunto Zero de Função em que estudaremos o Método de Newton-Raphson, assim denominado por ter sido desenvolvido por Isaac Newton (1643 – 1727), o pai do Cálculo Diferencial e Integral, e aperfeiçoado pelo pesquisador Joseph Raphson (1648 – 1715).

O método que estaremos estudando é extremamente eficiente e de convergência rápida, porém deveremos ter como pré-requisito o conhecimento de derivadas; com essa habilidade, a determinação o Zero da Função torna-se muito simples.

Nesta seção, resolveremos, novamente, o problema da Suellen que foi auxiliada por Samuel fazendo uso do Método de Newton-Raphson.

Relembrando o problema: Suellen financiou um veículo de R$ 50000,00 em 48 parcelas mensais e iguais a R$ 4754,28. Ela necessita saber a taxa de juros utilizada no seu financiamento, podendo haver uma diferença menor ou igual a R$ 0,10 no valor da parcela. Ao determinar a taxa de juros, ela poderá orientar seu irmão que também deseja adquirir um veículo. Sabendo que a equação de cálculo de financiamento é dada por: $Valor\ da\ parcela = \frac{Valor\ de\ financiamento}{\left[\frac{1-(1+taxa\ de\ juros)^{-\ núm.\ de\ parcelas}}{taxa\ de\ juros}\right]}$; e a taxa de juros, no mercado para financiamento de veículos, varia entre 9% e 10% a.m. Samuel, auxiliou na obtenção da taxa de juros utilizando o Método de Newton-Raphson.

Colocando-se agora no lugar de Samuel: o que você precisa fazer para resolver o problema fazendo uso do método de Newton-Raphson?

Esperamos que ao final desta seção você perceba que a técnica aplicada neste método é a que apresenta maior velocidade de convergência e maior precisão.

Não pode faltar

Método de Newton-Raphson

Seja $f(x)$ uma função que desejamos determinar o Zero e $x = x_0$ um valor de que está próximo do Zero da Função, que chamamos de valor inicial. O método de Newton-Raphson, segue os seguintes passos:

Assimile

1. Se $|f(x_n)| \leq \varepsilon$ então x_n é o Zero da Função.

2. Se $|f(x_n)| > \varepsilon$ então x_n não é o Zero da Função;

Portanto devemos determinar x_{n+1}.

3. Para determinar x_{n+1} devemos usar a função iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4. Se $|f(x_{n+1})| > \varepsilon$ então x_{n+1} não é o Zero da Função;

Portanto devemos retornar ao passo 3. Caso contrário, encerramos os cálculos.

Detalhando a teoria:

1. Se $|f(x_0)| \leq \varepsilon$ então x_0 é o Zero da Função.

2. Se $|f(x_0)| > \varepsilon$ então x_0 não é o Zero da Função;

Portanto devemos determinar x_1.

3. Para determinar x_1 devemos usar a função iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

Ficando dessa forma:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

4. Se $|f(x_1)| \leq \varepsilon$ então x_1 é o Zero da Função.

5. Se $|f(x_1)| > \varepsilon$ então x_1 não é o Zero da Função;

Portanto devemos determinar x_2, sendo:

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

6. Se $|f(x_2)| \leq \varepsilon$ então x_2 é o Zero da Função.

7. Se $|f(x_2)| > \varepsilon$ então x_2 não é o Zero da Função e determinamos x_3 para iterar novamente.

Devemos continuar as iterações até $|f(x_n)| \leq \varepsilon$ e x_n é o Zero da Função.

Pesquise mais

Em busca do conhecimento, leia: <http://www2.sorocaba.unesp.br/professor/amartins/aulas/numerico/nr.pdf>. Acesso em: 05 ago. 2015.

Exemplificando

Dada $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 5$, determine o zero dessa função, ou as raízes, ou ainda o valor que fará ela, a função $f(x)$, igual a zero, para $\varepsilon = 0{,}001$, no intervalo de 1 a 3 de x.

Lembrando que x_0 é um valor atribuído pelo pesquisador, que é um "chute" direcionado para ser o mais próximo quanto possível do zero, vamos adotar como x_0 o valor médio dos extremos do intervalo, ou seja $x_0 = 2$

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n} + x_n^2 - 5$$

Para obter a função iterativa: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ precisamos de $f'(x_n)$.

Então, para facilitar a derivação, escrevemos $f(x_n) = x_n^{-1} + x_n^2 - 5$, assim:

$f'(x_n) = -x_n^{-2} + 2x_n \rightarrow f'(x_n) = -\frac{1}{x_n^2} + 2x_n$.

A função iterativa fica definida dessa forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} + x_n^2 - 5}{-\frac{1}{x_n^2} + 2x_n}.$$

Iniciando os cálculos:

<u>1ª Iteração</u>: $x_0 = 2$:

$f(x_n) = \frac{1}{x_n} + x_n^2 - 5 \rightarrow f(x_0) = \frac{1}{x_0} + x_0^2 - 5 \rightarrow f(2) = \frac{1}{2} + 2^2 - 5$;

$f(x_0) = f(2) = -3 \rightarrow f(x_0) = -0{,}5$;

$|f(x_0)| = 0{,}5 > \varepsilon = 0{,}001$ portanto deveremos calcular x_1 usando a função iterativa:

$f'(x_n) = -\frac{1}{x_n^2} + 2x_n \rightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} + 2x_0 \rightarrow f'(2) = -\frac{1}{2^2} + 2 \cdot 2$;

$f'(x_0) = f'(2) = 3{,}75$;

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \rightarrow x_1 = 2 - \frac{-0{,}5}{3{,}75}$;

$x_1 = 2{,}1333$.

<u>2ª Iteração</u>: $x_1 = 2{,}1333$:

$f(x_n) = \frac{1}{x_n} + x_n^2 - 5 \rightarrow f(x_1) = \frac{1}{x_1} + x_1^2 - 5 \rightarrow f(2{,}1333) = \frac{1}{2{,}1333} + 2{,}1333^2 - 5$;

$f(x_1) = f(2{,}1333) = 0{,}0199 \rightarrow f(x_1) = 0{,}0199$;

$|f(x_1)| = 0{,}0199 > \varepsilon = 0{,}001$ portanto deveremos calcular x_2 usando a função iterativa:

$f'(x_n) = -\frac{1}{x_n^2} + 2x_n \rightarrow f'(x_1) = -\frac{1}{x_1^2} + 2x_1 \rightarrow f'(2{,}1333) = -\frac{1}{2.1333} + 2 \cdot 2{,}1333$;

$f'(x_1) = f'(2{,}1333) = 4{,}0469$;

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \rightarrow x_2 = 2{,}1333 - \frac{0{,}0199}{4{,}0469}$;

$x_2 = 2{,}1284$.

<u>3ª Iteração</u>: $x_2 = 2{,}1284$:

$f(x_n) = \frac{1}{x_n} + x_n^2 - 5 \rightarrow f(x_2) = \frac{1}{x_2} + x_2^2 - 5 \rightarrow f(2{,}1284) = \frac{1}{2{,}1284} + 2{,}1284^2 - 5$;

$$f(x_2) = f(2{,}1284) = 0{,}00003 \rightarrow f(x_2) = 0{,}00003;$$

$$|f(x_2)| = 0{,}00003 > \varepsilon = 0{,}001.$$

Portanto x = $2{,}1284$ é o Zero da Função.

Como fizemos nas seções anteriores, resolveremos o mesmo problema fazendo uso de uma tabela, a Tabela 2.4.

Tabela 2.4 | Passos para a determinação de um zero de $f\ (x)$ pelo Método de Newton-Raphson

x_n		$f(x_n) = \frac{1}{x_n} + x_n^2 - 5$	Comentários	$f'(x_n) = -\frac{1}{x_n^2} + 2x_n$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
		f (x_n)		$f'(x_n)$	X_{n+1}
x_0	2	-0,50	$\|f\ (x_0)\| = 0{,}50 > \varepsilon = 0{,}001$ portanto deveremos calcular x_1 usando a função iterativa	3,75	2,1333
x_1	2,1333	0,0199	$\|f\ (x_1)\| = 0{,}0199 > \varepsilon = 0{,}001$ portanto deveremos calcular x_2 usando a função iterativa	4,0469	2,1284
x_2	**2,1284**	0,00003	$\|f\ (x_2)\| = 0{,}00003 < \varepsilon = 0{,}001$ portanto $x_3 = 2{,}1284$ é o zero da função.		

No mesmo problema apresentado nas seções 2.1, 2.2 e 2.3, resolvido pelos métodos da Bissecção, Falsa Posição e MIL, respectivamente, foi resolvido nessa seção 2.4 pelo método de Newton-Raphson que para esse tipo de problema apresentou a maior velocidade de convergência.

Veja o quadro a seguir, com os números de iterações necessárias em cada método para se obter a solução. Lembrando que quanto menor o número de iterações maior é a velocidade de convergência.

Quadro com número de iterações necessárias para solucionar o problema acima em cada método estudados nas seções 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4

Métodos	Número de Convergências
Bissecção	11
Falsa Posição	6
Iterativo Linear	4
Newton-Raphson	3

Faça você mesmo

Determine o Zero da Função, pelo Método de Newton-Raphson, para $f(x) = x^3 - x - 3$, no intervalo $I = [1{,}57;\ 1{,}79]$ para $\varepsilon = 0{,}05$.

Sem medo de errar

Com o conhecimento que adquirimos sobre o Método de Newton-Raphson resolveremos o problema da Suellen com o auxílio de Samuel.

Suellen financiou um veículo de R$ 50000,00 em 48 parcelas mensais e iguais de R$ 4754,28. Ela necessita saber a taxa de juros utilizada no seu financiamento, podendo haver uma diferença menor ou igual a R$ 0,10 no valor da parcela; para poder orientar seu irmão que também deseja adquirir um veículo. Sabendo que a equação de cálculo de financiamento é dada por: $Valor\ da\ parcela = \frac{Valor\ de\ financiamento}{\left[\frac{1-(1+taxa\ de\ juros)^{-\,núm.\ de\ parcelas}}{taxa\ de\ juros}\right]}$; e a taxa de juros, no mercado para financiamento de veículos, varia entre 9% e 10% a.m., ela solicitou a ajuda de Samuel que resolveu o problema pelo Método de Newton-Raphson.

Sendo a função da taxa de juros a mesma vista nas seções anteriores:

$$f(x) = 4754{,}28\left[\frac{1-(1+x)^{-48}}{x}\right] - 50000.$$

Para facilitar a derivação, podemos reescrever a função assim:

$$f(x) = \frac{4754{,}28 - 4754{,}28(1+x)^{-48}}{x} - 50000 \rightarrow f(x) = \left(\frac{u}{v}\right) - 50000$$

Desenvolvendo a derivação:

$$\frac{4754{,}28 - 4754{,}28(1+x)^{-48}}{x}\frac{u}{v} \rightarrow \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u = 4754{,}28 - 4754{,}28(1+x)^{-48}$$

$$u' = 0 - (-48)4754{,}28(1+x)^{-49} \cdot 1 \rightarrow u' = 228205{,}44(1+x)^{-49}$$

$$v = x$$

$$v' = 1$$

Sendo

$$f(x) = \left(\frac{u}{v}\right) - 50000$$

então

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} - 0$$

$$f'(x) = \frac{228205{,}44(1+x)^{-49}x - [4754{,}28 - 4754{,}28(1+x)^{-48}] \cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{228205{,}44x(1+x)^{-49} - 4754{,}28 + 4754{,}28(1+x)^{-48}}{x^2}$$

Com $x_0 = 0{,}09$, temos:

x_n		$f(x_n)$	Comentários	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ X_{n+1}
x_0	0,09	1981,28	$\vert f(x_0)\vert = 1981,28 > \varepsilon = 0,10$ portanto deveremos calcular x_1 usando a função iterativa	–540400,41	0,0937
x_1	0,0937	50,36	$\vert f(x_1)\vert = 50,36 > \varepsilon = 0,10$ portanto deveremos calcular x_2 usando a função iterativa	–503915,96	0,0938
x_2	0,0938	0,018	$\vert f(x_2)\vert = 0,018 < \varepsilon = 0,10$ portanto $x_2 = 0,0938$ é o Zero da Função.		

Portanto o Zero da Função é a taxa de juros de 9,38% a.m. que Suellen deseja saber.

Adotando $x_0 = 0,10$, temos:

x_n		$f(x_n)$	Comentários	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
					X_{n+1}
x_0	0,10	–2947,25	$f(x_0)\vert = 2947,25 > \varepsilon = 0,10$ portanto deveremos calcular x_1 usando a função iterativa	–449143,77	0,0934
x_1	0,0934	201,96	$\vert f(x_1)\vert = 201,96 > \varepsilon = 0,10$ portanto deveremos calcular x_2 usando a função iterativa	–506747,09	0,0938
x_2	0,0938	0,018	$\vert f(x_2)\vert = 0,018 < \varepsilon = 0,10$ portanto $x_2 = 0,0938$ é o Zero da Função		

Notamos que, adotando qualquer um dos valores extremos do intervalo dado, obtivemos a mesma resposta, e também que a convergência foi rápida. Nos Métodos da Bissecção, Iterativo Linear e de Newton-Raphson foram necessárias três iterações para se obter a resposta e no Método da Falsa Posição foram necessárias quatro iterações.

Atenção!

Segue abaixo os procedimentos básicos desse método:

1. Se $|f(x_n)| \leq \varepsilon$ então x_n é o Zero da Função.

2. Se $|f(x_n)| > \varepsilon$ então x_n não é o Zero da Função;

Portanto devemos determinar x_{n+1}.

3. Para determinar x_{n+1} devemos usar a função iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4. Se $|f(x_{n+1})| > \varepsilon$ então x_{n+1} não é o Zero da Função;

Portanto devemos retornar ao passo 3. Caso contrário, encerramos os cálculos.

Lembre-se

O Método de Newton-Raphson requer que você revise as técnicas sobre derivadas. Para isso, leia: <http://wwwp.fc.unesp.br/~arbalbo/arquivos/derivadas.pdf>. Acesso em: 2 ago. 2015.

Avançando na prática

<table>
<tr><th colspan="2">Pratique mais</th></tr>
<tr><td colspan="2">Instrução
Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois as compare com a de seus colegas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Método de Newton-Raphson</td></tr>
<tr><td>1. Competência de fundamentos de área</td><td>Conhecer formas para calcular zeros de funções.</td></tr>
<tr><td>2. Objetivos de aprendizagem</td><td>Calcular os zeros de uma função.</td></tr>
<tr><td>3. Conteúdos relacionados</td><td>Zeros de funções.</td></tr>
<tr><td>4. Descrição da SP</td><td>Nos últimos anos, os verões, aqui no Brasil, têm sido muito rigorosos, com temperaturas muito acima do normal, fazendo com que a aquisição de aparelhos de ar-condicionado seja muito grande, e por consequência os seus preços atingem altas significativas, assim a aquisição desses aparelhos em sua grande maioria é realizada por financiamento. Um aparelho de ar-condicionado de 18000 Btus, cujo valor à vista é R$ 2100,00, é financiado em 10 parcelas mensais e iguais a R$ 297,06, com taxa de juros variando entre 6,43% a.m. e 7,34% a.m., gerando a função de taxa de juros $f(x)$: .
$$f(x) = 297{,}06\left[\frac{1-(1+x)^{-10}}{x}\right] - 2100$$
Determine a taxa de juros aplicada na situação apresentada com $\varepsilon = \text{R\$ } 0{,}10$.</td></tr>
</table>

5. Resolução da SP	Novamente a taxa de juros, que desejamos determinar, é o Zero da Função, então aplicaremos as teorias apresentadas nessa seção: 1. Se $\lvert f(x_n)\rvert \leq \varepsilon$ então x_n é o Zero da Função. 2. Se $\lvert f(x_n)\rvert > \varepsilon$ então x_n não é o Zero da Função; Portanto devemos determinar x_{n+1}. 3. Para determinar x_{n+1} devemos usar a função iterativa: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. 4. Se $\lvert f(x_{n+1})\rvert > \varepsilon$ então x_{n+1} não é o Zero da Função. Portanto devemos retornar ao passo 3. Caso contrário, encerramos os cálculos. $f(x) = 297{,}06\left[\frac{1-(1+x)^{-10}}{x}\right] - 2100$ Para facilitar a derivação, podemos reescrever: $f(x) = \frac{297{,}06 - 297{,}06(1+x)^{-10}}{x} - 2100 \rightarrow f(x) = \left(\frac{u}{v}\right) - 2100$ Desenvolvendo a derivação: $\frac{297{,}06 - 297{,}06(1+x)^{-10}}{x} = \frac{u}{v} \rightarrow \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $u = 297{,}06 - 297{,}06(1+x)^{-10}$ $u' = 0 - (-10)297{,}06(1+x)^{-11} \cdot 1 \rightarrow u' = 2970{,}60(1+x)^{-11}$ $v = x$ $v' = 1$ Sendo $f(x) = \left(\frac{u}{v}\right) - 50000$

então

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} - 0$$

$$f'(x) = \frac{2970{,}60(1+x)^{-11}x - [297{,}06 - 297{,}06(1+x)^{-10}] \cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2970{,}60x(1+x)^{-11} - 297{,}06 + 297{,}06(1+x)^{-10}}{x^2}$$

Com $x_0 = 0{,}0643$, temos:

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0,0643	42,526944	–10043,71	0,0685
0,0685	0,9690356	–9747,61	0,0686
0,0686	–0,0053791		

A taxa de juros aplicada na situação apresentada é de 6,86% a.m.

Faça você mesmo

Dada a função $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} - 6$, determine o Zero para o intervalo $I = [2{,}3]$ e $\varepsilon = 0{,}01$, fazendo uso do Método Newton-Raphson.

Faça valer a pena!

Resolva exercícios a seguir aplicando o Método de Newton-Raphson.

1. Determine o zero da função $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x + 3$ existente entre os valores de 4, 5 e 6 de x, com $\varepsilon = 0{,}05$ e assinale a alternativa correta.

a) $x = 4{,}96$.

b) $x = 4{,}86$.

c) $x = 5{,}97$.

d) $x = 9{,}47$.

e) $x = 5{,}99$.

2. Assinale a alternativa que indica o zero da função $f(x) = -\frac{1}{x^2} - x + 6$ existente entre os valores 5 e 8 de x, com $\varepsilon = 0{,}05$.

a) $x = 6{,}95$.

b) $x = 7{,}45$.

c) $x = 5{,}94$.

d) $x = 5{,}59$.

e) $x = 7{,}59$.

3. Determine o zero da função $g(x) = -\frac{30}{ln\,(x)} + 2x + 10$ existente entre os valores 4 e 5 de x, com $\varepsilon = 0{,}05$ e assinale a alternativa correta.

a) $x = 4{,}757$.

b) $x = 4{,}653$.

c) $x = 4{,}039$.

d) $x = 4{,}968$.

e) $x = 4{,}697$.

4. Determine o zero da função $r(t) = e^t + \left(ln(t)\right)^{-1} - 10$ existente entre os valores 2 e 3 de t, com $\varepsilon = 0{,}05$ e assinale a alternativa correta.

a) $t = 2{,}84$.

b) $t = 2{,}16$.

c) $t = 2{,}67$.

d) $t = 2{,}89$.

e) $t = 2{,}58$.

5. Assinale a alternativa que indica o zero da função $z(k) = (k^2 + 0{,}7k - 8)(k^2 + 2k - 35)^{-1}$ existente entre os valores -4 e -3 de k, com $\varepsilon = 0{,}01$.

a) $k = -3{,}25$.

b) $k = -3{,}52$.

c) $k = -3{,}15$.

d) $k = -3{,}53$.

e) $k = -3{,}21$.

6. Considerando a função $f(x) = 0{,}25x^4 + 2x^3 - 7{,}5x^2 + 3$, determine dois de seus zeros, um existente entre os valores 0 e 1,5, e o outro existente entre os valores $-1{,}51$ e $-0{,}1$ de x, com $\varepsilon = 0{,}10$.

7. Determine o zero da função $f(x) = x - 2x^{-2/3} + 5$ existente entre os valores 0 e 1 de x, com $\varepsilon = 0{,}05$.

Referências

ARENALES, S.; DAREZZO, S. **Cálculo numérico**: aprendizagem com apoio de software. São Paulo: Thompson Learning, 2008.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise numérica**. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2003.

CANTÃO, L. A. P. **Cálculo numérico e computacional**. Disponível em: <http://www2.sorocaba.unesp.br/professor/luiza/CNC/apostila.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2015.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo numérico**. São Paulo: Pearson, 2006.

GALVÃO, L. C.; NUNES, L. F. **Apostila 2 de cálculo numérico** - UTFPR. Disponível em: <http://www1.univap.br/spilling/CN/apostila2.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2015.

GAVALA, Francisco Javier Cobos. **Cálculo numérico**: apuntes para el curso de 2001-2002. Disponível em: <http://www.decom.ufop.br/bcc760/material_de_apoio/livros/livro_port.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2015.

QUEIROZ, B. C. N; QUEIROZ, J. E. R.; BARROS, M. A. **Cálculo numérico**. Disponível em: <www.dsc.ufcg.edu.br/~cnum/modulos/Modulo4/CN_Parte1_Intro.ppt>. Acesso em: 22 jul. 2015.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lucia da Rocha. **Cálculo numérico**: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luiz Henry Monken e. **Cálculo numérico**: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

INTERPOLAÇÃO

Convite ao estudo

Caro aluno, nesta unidade estudaremos interpolação. Essa é uma técnica numérica que tem por objetivo obter uma função polinomial, cujo gráfico passe por pontos pré-determinados. Quando não temos o conhecimento dessa função e queremos calcular um valor desconhecido, aplicamos a interpolação. Aplicando uma das formas da interpolação, obtemos o valor desejado aproximado.

Aprenderemos interpolar usando o polinômio interpolar, o polinômio na forma de Lagrange e também na forma de Newton. Para finalizar, estudaremos o erro na interpolação.

A interpolação é uma técnica muito utilizada nas áreas de Ciências Exatas, Tecnológicas, Econômicas e Financeiras. Nessas áreas, também é comum surgirem problemas que apresentam funções polinomiais como $f(x)=x^2+6x+8$. Conhecendo essas funções, podemos esboçar seus gráficos definindo os valores para a sua variável independente x e obtendo os valores de $f(x)$, a variável dependente, ou, também, denominada de variável de predição. No entanto, em cálculo numérico a situação é inversa: temos os valores dos pares ordenados $(x, f(x))$ e desconhecemos a função que explica a sua distribuição gráfica. Para isso, usamos a interpolação que nos fornecerá um polinômio interpolador que explica a distribuição gráfica dos pares ordenados e nos dá condições de predizer valores desconhecidos.

A seguir, será apresentada uma situação hipotética que nos ajudará a desenvolver os conceitos e as técnicas da interpolação com uma visão prática. Assim:

Uma empresa de sucata de ferro, material muito utilizado nas fundições, tem seus valores de comercialização representados na Tabela 3.1:

Tabela 3.1 | Preço de sucata de ferro

x	Toneladas de Ferro	3	5	9
$f(x)$	Preço de Venda [Mil Reais]	120	195	225

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma fundição solicita um orçamento para a compra de 7,45 toneladas de sucata de ferro. Para atender à solicitação do cliente, são chamados quatro vendedores: três desses vendedores apresentaram o orçamento, interpolando os valores da Tabela 3.1; o primeiro vendedor, Arnaldo, usou a técnica do polinômio interpolador; o segundo, Bruno, fez uso da forma de Lagrange; e o terceiro, Carlos, aplicou a forma de Newton. O quarto vendedor, Dagoberto, verificou o erro na interpolação pela forma de Newton.

Em cada uma das seções seguintes, você será convidado a se colocar no lugar de cada um dos vendedores e, ao final desta unidade, você poderá atender à solicitação do cliente, além de identificar as características de cada método e compreender as facilidades e dificuldades de utilização de cada um.

Seção 3.1

Polinômio interpolador

Diálogo aberto

Aluno, a interpolação é uma técnica muito utilizada nas áreas de Ciências Exatas, Tecnológicas, Econômicas e Financeiras.

Nesta seção, trataremos da interpolação fazendo uso do polinômio interpolador. Para isso, desenvolveremos a resolução do problema do orçamento de venda de sucata de ferro apresentado anteriormente.

Mas o que é interpolação? Tendo um conjunto de pares ordenados cuja função é desconhecida, ou muito complexa, você determina uma função mais simples, que se aproxima da função original, e também determina pares ordenados não existentes nesse conjunto; usamos os métodos de interpolação para que isso aconteça.

Para compreender melhor, vamos retomar o problema proposto anteriormente: uma fundição solicita um orçamento para a compra de 7,45 toneladas de sucata de ferro e o primeiro vendedor, Arnaldo, apresenta o orçamento calculando o preço por meio do polinômio interpolador.

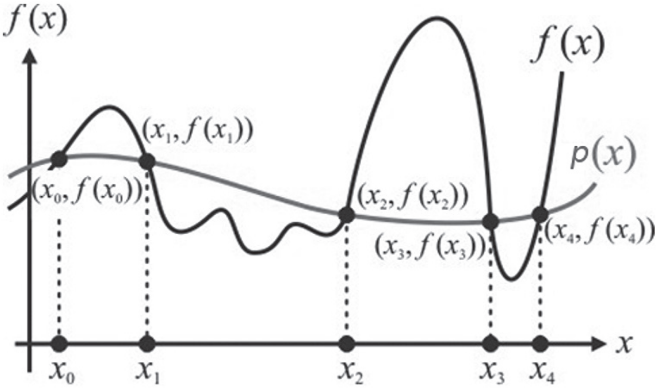
Coloque-se no lugar desse vendedor: o que você precisa saber para resolver esse problema usando cálculo numérico e, mais especificamente, o polinômio interpolador?

Ao final desta seção, esperamos que você conclua que, para resolver o problema, teremos de conhecer aspectos teóricos relacionados ao método polinômio interpolador.

Não pode faltar

Suponha que tenhamos $(n+1)$ pares ordenados distintos, $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ... $(x_n, f(x_n))$, denominados pontos de interpolação, conforme Gráfico 3.1.

Gráfico 3.1 | Pares ordenados distintos



Fonte: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/03/interpolacao-polinomial-parte-1.html. Acesso em: 24 ago. 2015.

A interpolação aqui apresentada é realizada através da determinação de um polinômio de grau $\leq n$ obtido pelo conhecimento dos pontos de interpolação.

O polinômio interpolador é $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, que é obtido através da resolução do seguinte sistema linear, onde $p(x)$ é uma aproximação para $f(x)$, que é a função desconhecida ou de maior complexidade.

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0{}^2 + \cdots + a_nx_0{}^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1{}^2 + \cdots + a_nx_1{}^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n{}^2 + \cdots + a_nx_n{}^n = f(x_n) \end{cases}.$$

Atenção!

Sempre temos $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas: a_0, a_1, a_2, ..., a_n.

Para a resolução do sistema, representamos o mesmo na forma matricial, sendo a primeira matriz a dos coeficientes, a segunda a das incógnitas e a terceira a dos termos independentes.

Então:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Unindo os coeficientes e os termos independentes numa única matriz, denominada matriz ampliada, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n & f(x_n) \end{bmatrix}$$

Essa última matriz, a matriz ampliada, é a que escalonamos para obter a solução.

Assimile

O polinômio interpolador será obtido pela resolução de sistema linear.

Pesquise mais

Veja mais detalhes sobre a interpretação geométrica e sobre a montagem do sistema linear que fornece os coeficientes do polinômio interpolador no material disponibilizado no *link* a seguir:

<http://wwwp.fc.unesp.br/~arbalbo/Iniciacao_Cientifica/interpolacao/teoria/1_Interpol_polinomial_Met_Lagrange_Newton.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2015.

Agora que você se inteirou um pouco sobre o método de interpolação, veja um exemplo prático para maior compreensão.

Atenção!

Todos os cálculos efetuados nessa seção serão arredondados com duas casas decimais, exceto quando for descrito o critério de arredondamento.

Exemplificando

Considerando os pares ordenados $(x, f(x))$ representados na Tabela 3.2, determine o valor de $f(4{,}39)$ por meio de interpolação polinomial.

Tabela 3.2 | Pares ordenados de $f(x)$

x	4	6	12
$f(x)$	5	1	0

Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução:

Ao observar a Tabela 3.2, note que podemos denotar $x_0 = 4$, $x_1 = 6$ e $x_2 = 12$. O maior valor de n para esse exemplo é 2 ($n =$ grau do polinômio), portanto o polinômio interpolador será de ordem 2, ou seja, de 2º grau.

Pelo apresentado, o polinômio interpolador é obtido resolvendo um sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2{x_0}^2 = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2{x_1}^2 = f(x_1) \\ a_0 + a_1x_2 + a_2{x_2}^2 = f(x_2) \end{cases}.$$

n	x_n	$f(x_n)$
0	4	5
1	6	1
2	12	0

$$\begin{cases} a_0 + 4a_1 + 4^2 a_2 = 5 \\ a_0 + 6a_1 + 6^2 a_2 {x_1}^2 = 1 \\ a_0 + 12a_1 + 12^2 a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + 4a_1 + 16a_2 = 5 \\ a_0 + 6a_1 + 36a_2{x_1}^2 = 1 \\ a_0 + 12a_1 + 144a_2 = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 12 & 144 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim, a matriz ampliada para a resolução do sistema por escalonamento fica:

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 16 & 5\\ 1 & 6 & 36 & 1\\ 1 & 12 & 144 & 0\end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema: (L_i) = Linha i

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 16 & 5\\ 1 & 6 & 36 & 1\\ 1 & 12 & 144 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\square\\ L_2-L_1\\ L_3-L_1\end{array}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 4 & 16 & 5\\ 0 & 2 & 20 & -4\\ 0 & 8 & 128 & -5\end{pmatrix}\begin{array}{l}\square\\ \square\\ L_3-4L_2\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 16 & 5\\ 0 & 2 & 20 & -4\\ 0 & 0 & 48 & 11\end{pmatrix}\begin{array}{l}\square\\ \square\\ L_3/48\end{array}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 4 & 16 & 5\\ 0 & 2 & 20 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 0{,}23\end{pmatrix}\begin{array}{l}L_1-16L_3\\ L_2-20L_3\\ \square\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & 1{,}33\\ 0 & 2 & 0 & -8{,}58\\ 0 & 0 & 1 & 0{,}23\end{pmatrix}\begin{array}{l}\square\\ L_2/2\\ \square\end{array}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & 1{,}33\\ 0 & 1 & 0 & -4{,}29\\ 0 & 0 & 1 & 0{,}23\end{pmatrix}\begin{array}{l}L_1-4L_2\\ \square\\ \square\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 18{,}50\\ 0 & 1 & 0 & -4{,}29\\ 0 & 0 & 1 & 0{,}23\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18{,}50\\ -4{,}29\\ 0{,}23\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18{,}50\\ -4{,}29\\ 0{,}23\end{pmatrix}$$

Como o polinômio interpolador é $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, então:

$$p(x)=18{,}50-4{,}29x+0{,}23x^2$$

Calculando $p(4{,}39)$, temos:

$$f(4{,}39)\cong p(4{,}39)=18{,}50-4{,}29\cdot 4{,}39+0{,}23\cdot 4{,}39^2$$

$$f(4{,}39)\cong \boldsymbol{p}(4{,}39)=4{,}10$$

Faça você mesmo

Dada a Tabela 3.3, determine o valor de $f(4,39)$ por meio de interpolação polinomial.

Tabela 3.3 | Pares ordenados de $f(x)$

x	1	4	6
$f(x)$	12	5	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Sem medo de errar

Agora que você já conheceu uma das técnicas de interpolação polinomial, vamos calcular o valor do orçamento da venda de sucata de ferro solicitada pela empresa de fundição. Coloque-se no lugar do vendedor Arnaldo e tome as rédeas do problema.

Solução:

Lembre-se de que, a partir da Tabela 3.1, temos os seguintes pares ordenados $(x, f(x))$ como base para a interpolação:

(5, 195), (9, 225), (12, 240)

O primeiro valor, x, representa a quantidade de toneladas de ferro e o segundo, $f(x)$, representa o preço de venda, em milhares.

Determinar o preço para 7,45 toneladas é mesmo que estimar $f(7,45)$ por meio de $p(7,45)$.

Assim:

n	x_n	$f(x_n)$
0	5	195
1	9	225
2	12	240

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2{x_0}^2 = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2{x_1}^2 = f(x_1) \\ a_0 + a_1x_2 + a_2{x_2}^2 = f(x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 + 5a_1 + 5^2 a_2 = 195 \\ a_0 + 9a_1 + 9^2 a_2 = 225 \\ a_0 + 12a_1 + 12^2 a_2 = 240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + 5a_1 + 25a_2 = 195 \\ a_0 + 9a_1 + 81a_2 = 225 \\ a_0 + 12a_1 + 144a_2 = 240 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 & 195 \\ 1 & 9 & 81 & 225 \\ 1 & 12 & 144 & 240 \end{pmatrix}$$

Escalonando a matriz, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 141,43 \\ 0 & 1 & 0 & 12,50 \\ 0 & 0 & 1 & -0,36 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 141,43 \\ 12,50 \\ -0,36 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \Rightarrow p(x) = 141,43 + 12,50x - 0,36x^2$$

Considerando $f(x) \cong p(x) = 141,43 + 12,50x - 0,36x^2$, então:

$$f(7{,}45) \cong p(7{,}45) = 141{,}43 + 12{,}50 \cdot 7{,}45 - 0{,}36 \cdot 7{,}45^2 = 214{,}57$$

Portanto, a empresa de fundição terá de pagar 214,57 mil reais por 7,45 toneladas de sucata de ferro.

Atenção!

Para que você tenha um embasamento maior, acesse: <http://www1.univap.br/spilling/CN/CN_Capt4.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2015.

Lembre-se

O polinômio interpolador é $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ e será obtido resolvendo-se o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0{}^2 + \cdots + a_n x_0{}^n = f\left(x_0\right) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1{}^2 + \cdots + a_n x_1{}^n = f\left(x_1\right) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n{}^2 + \cdots + a_n x_n{}^n = f\left(x_n\right) \end{cases}$$

Avançando na prática

<table>
<tr><th colspan="2">Pratique mais</th></tr>
<tr><td colspan="2">Instrução
Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Interpolação polinomial</td></tr>
<tr><td>1. Competência de fundamentos de área</td><td>Conhecer o cálculo numérico.</td></tr>
<tr><td>2. Objetivos de aprendizagem</td><td>Obter o polinômio interpolador e calcular o valor y correspondente a um x não tabelado.</td></tr>
<tr><td>3. Conteúdos relacionados</td><td>Interpolação.</td></tr>
<tr><td>4. Descrição da situação -problema</td><td>Uma empresa de distribuição de sílica, material muito utilizado na fabricação de vidros, tem seus preços apresentados na Tabela 3.4:

Tabela 3.4 | Preço da sílica
<table><tr><td>x</td><td>Toneladas de Ferro</td><td>3</td><td>5</td><td>9</td></tr><tr><td>$f\left(x\right)$</td><td>Preço de Venda [Mil Reais]</td><td>120</td><td>195</td><td>225</td></tr></table>Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma indústria de vidros solicita um orçamento para a compra de 7,45 toneladas de sílica. Suponha que você seja o vendedor e que necessite determinar o valor da venda utilizando o método da interpolação polinomial. Determine o polinômio interpolador e o valor da venda. Para isso, utilize um arredondamento de 4 casas decimais.</td></tr>
</table>

5. Resolução da situação -problema	Para o problema apresentado, veja o desenvolvimento da resolução. <table><tr><th>n</th><th>x_n</th><th>$f(x_n)$</th></tr><tr><td>0</td><td>3</td><td>120</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td><td>195</td></tr><tr><td>2</td><td>9</td><td>225</td></tr><tr><td>3</td><td>12</td><td>240</td></tr></table> $\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2{x_0}^2 + a_3{x_0}^3 = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2{x_1}^2 + a_3{x_1}^3 = f(x_1) \\ a_0 + a_1x_2 + a_2{x_2}^2 + a_3{x_2}^3 = f(x_2) \\ a_0 + a_1x_3 + a_2{x_3}^2 + a_3{x_3}^3 = f(x_3) \end{cases}$ $\begin{cases} a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 + 3^3 a_3 = 120 \\ a_0 + 5a_1 + 5^2 a_2 + 5^3 a_3 = 195 \\ a_0 + 9a_1 + 9^2 a_2 + 9^3 a_3 = 225 \\ a_0 + 12a_1 + 12^2 a_2 + 12^3 a_3 = 240 \end{cases}$ $\begin{cases} a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 120 \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 = 195 \\ a_0 + 9a_1 + 81a_2 + 729a_3 = 225 \\ a_0 + 12a_1 + 144a_2 + 1728a_3 = 240 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 9 & 81 & 729 \\ 1 & 12 & 144 & 1728 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 195 \\ 225 \\ 240 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 27 & 120 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 195 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 225 \\ 1 & 12 & 144 & 1728 & 240 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -137{,}1420 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 122{,}3810 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -13{,}7698 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}5159 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -137{,}1420 \\ 122{,}3810 \\ -13{,}7698 \\ 0{,}5159 \end{pmatrix}$$

Polinômio interpolador:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$p(x) = -137{,}1420 + 122{,}3810x - 13{,}7698x^2 + 0{,}5159x^3$$

	Valor da venda de 7,45 toneladas de sucata de ferro $p(7{,}45) = -137{,}1420 + 122{,}3810 \cdot 7{,}45 - 13{,}7698 \cdot 7{,}45^2 +$ $+0{,}5159 \cdot 7{,}45^3$ $p(7{,}45) = 223{,}6448$ mil reais Resposta: o polinômio interpolador é: $p(x) = -137{,}142 + 122{,}381x - 13{,}7698x^2 + 0{,}5159x^3$ e o valor da venda de 7,45 toneladas de sílica é 223,6448 mil reais.

Pesquise mais

Reforce o seu conhecimento acessando o *link* a seguir: <http://www.inf.ufpr.br/silvia/numerico/IV1.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2015.

Faça você mesmo

A Tabela 3.5 indica a queda de temperatura $f(x)$ de um freezer em função do tempo x, após a entrada de uma massa de ar quente. Determine a temperatura no instante $4{,}39\ s$ por meio de interpolação polinomial.

Tabela 3.5 | Pares ordenados de $f(x)$

Instante – $x[s]$	1	4	6	12
Temperatura - $f(x)[^oC]$	12	5	1	0

Fonte: Elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

Lembre-se

Para resolver os exercícios a seguir, utilize o arredondamento de duas casas decimais para cada cálculo.

1. Dada a Tabela 3.6, determine o valor aproximado de $f(5)$ por meio de interpolação polinomial.

a) $f(5)=4,0$.

b) $f(5)=3,9$.

c) $f(5)=2,6$.

d) $f(5)=1,4$.

e) $f(5)=1,1$.

Tabela 3.6 – Pares ordenados de $f(x)$

x	1	4	6
$f(x)$	0	1	5

Fonte: Elaborada pelo autor.

2. Dada a Tabela 3.7, determine o valor aproximado de $f(5)$ por meio de interpolação polinomial.

a) $f(5)=5,2$.

b) $f(5)=4,9$.

c) $f(5)=1,4$.

d) $f(5)=2,1$.

e) $f(5)=3,2$.

Tabela 3.7 – Pares ordenados de $f(x)$

x	4	6	12
$f(x)$	1	5	12

Fonte: Elaborada pelo autor.

3. Dada a Tabela 3.8, determine o valor aproximado de $f(5)$ por meio de interpolação polinomial.

a) $f(5)=2,75$.

b) $f(5)=4,73$.

c) $f(5)=5,61.$

d) $f(5)=1,02$.

e) $f(5)=0,80$.

Tabela 3.8 – Pares ordenados de $f(x)$

x	1	4	6	12
$f(x)$	0	1	5	12

Fonte: Elaborada pelo autor.

4. Dada a Tabela 3.9, determine o valor aproximado de $f(9)$ por meio de interpolação polinomial.

a) $f(9)=6,75$.

b) $f(9)=7,24$.

c) $f(9)=9,61$.

d) $f(9)=12,94$.

e) $f(9)=14,20$.

Tabela 3.9 – Pares ordenados de $f(x)$

x	6	8	12	15
$f(x)$	2	10	12	9

Fonte: Elaborada pelo autor.

5. Dada a Tabela 3.10, determine o valor aproximado de $f(11)$ por meio de interpolação polinomial.

a) $f(5)=9,67$.

b) $f(5)=12,55$.

c) $f(5)=7,38$.

d) $f(5)=15,00$.

e) $f(5)=14,42$.

Tabela 3.10 – Pares ordenados de $f(x)$

x	6	8	12
$f(x)$	2	10	12

Fonte: Elaborada pelo autor.

6. Dada a Tabela 3.11, determine o valor aproximado de $f(9)$ por meio de interpolação polinomial.

Tabela 3.11 – Pares ordenados de $f(x)$

x	8	12	15
$f(x)$	10	12	9

Fonte: Elaborada pelo autor.

7. Dada a Tabela 3.12, determine o valor aproximado de $f(-0,5)$ por meio de interpolação polinomial.

Tabela 3.12 – Pares ordenados de $f(x)$

x	-3	-2	-1	1	3
$f(x)$	0,10	0,28	0,74	5,44	40,17

Fonte: Elaborada pelo autor.

Seção 3.2

Forma de Lagrange para o polinômio interpolador

Diálogo aberto

Caro aluno,

Nesta seção, trataremos da interpolação, fazendo uso do polinômio interpolador de Lagrange, e novamente estaremos desenvolvendo a resolução do problema do orçamento de venda de sucata de ferro, apresentado no início desta unidade.

Uma fundição solicita um orçamento para a compra de 7,45 toneladas de sucata de ferro, e o vendedor Bruno apresenta o orçamento calculando o preço por meio do polinômio interpolador de Lagrange.

Coloque-se agora no lugar de Bruno: o que você precisa saber para resolver esse problema usando cálculo numérico e, mais especificamente, o polinômio interpolador de Lagrange?

Ao final desta seção, esperamos que você conclua que, para resolver o problema, teremos de conhecer aspectos teóricos relacionados ao método polinômio interpolador de Lagrange.

Não pode faltar

Atenção!

Todos os cálculos efetuados nessa seção serão arredondados com duas casas decimais, exceto quando for descrito o critério de arredondamento.

Como apresentado na seção 3.1, suponha novamente que tenhamos $(n+1)$ pontos de interpolação distintos, $(x_0, f(x_0))$; $(x_1, f(x_1))$; ...; $(x_n, f(x_n))$. A interpolação aqui apresentada é realizada através da determinação de um polinômio de grau ≤ n obtido pelo conhecimento dos pontos de interpolação.

O polinômio interpolador é $p(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x)$, onde:

$$L_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$p(x)=f(x_0)L_0(x)+f(x_1)L_1(x)+\cdots+f(x_n)L_n(x)$$

os polinômios $L_k(x)$ são denominados **polinômios de Lagrange**.

Atenção!

O polinômio interpolador é único, ou seja, o polinômio obtido pelo método da interpolação polinomial será igual ao obtido na interpolação pela forma de Lagrange.

Pesquise mais

Para aprofundar seu conhecimento, acesse:

<www.youtube.com/watch?v=qGZWSLvMa_c>. Acesso em: 20 ago. 2015.

Tendo conhecido os polinômios de Lagrange e o modo como eles são utilizados para compor o polinômio interpolador, veja um exemplo para reforçar seu aprendizado:

Exemplificando

Dada a Tabela 3.13, determine o valor de $f(8)$, fazendo a interpolação na forma de Lagrange:

x	3	7	10
$f(x)$	5	9	11

Resolução:

k	0	1	2
x	3	7	10
$f(x)$	5	9	11

$$L_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-7)(x-10)}{(3-7)(3-10)}$$

$$L_0(x)=\frac{x^2-17x+70}{28}$$

$$\boldsymbol{f(x_0)L_0(x)}=5\left(\frac{\boldsymbol{x}^2-17\boldsymbol{x}+70}{28}\right)$$

$$\boldsymbol{f(x_0)L_0(x)}=0{,}18\boldsymbol{x}^2-3{,}04\boldsymbol{x}+12{,}5$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-3)(x-10)}{(7-3)(7-10)}$$

$$L_1(x)=-\frac{x^2-13x+30}{12}$$

$$f(x_1)L_1(x)=-9\left(\frac{x^2-13x+30}{12}\right)$$

$$\boldsymbol{f(x_1)L_1(x)}=-0{,}75\boldsymbol{x}^2+9{,}75\boldsymbol{x}-22{,}5$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-3)(x-7)}{(10-3)(10-7)}$$

$$L_2(x)=\frac{x^2-10x+21}{21}$$

$$f\left(x_2\right)L_2\left(x\right)=11\left(\frac{x^2-10x+21}{21}\right)$$

$$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_2\right)\boldsymbol{L}_2\left(\boldsymbol{x}\right)=0,52\boldsymbol{x}^2-5,24\boldsymbol{x}+11$$

$$p\left(x\right)=f\left(x_0\right)L_0\left(x\right)+f\left(x_1\right)L_1\left(x\right)+\cdots+f\left(x_n\right)L_n\left(x\right)$$

$$p\left(x\right)=f\left(x_0\right)L_0\left(x\right)+f\left(x_1\right)L_1\left(x\right)+f\left(x_2\right)L_2\left(x\right)$$

$$p\left(x\right)=0,18x^2-3,04x+12,5-0,75x^2+9,75x-22,5+0,52x^2-5,24x+11$$

$\boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{x}\right)=-0,05\boldsymbol{x}^2+1,47\boldsymbol{x}+1\Rightarrow$ Polinômio Interpolador de Lagrange

$$f(8)=p(8)=-0{,}05\cdot 8^2+1{,}47\cdot 8+1$$

Portanto, $\boldsymbol{f}\left(8\right)=\boldsymbol{p}\left(8\right)=9,56$

Você pode facilitar a visualização do cálculo que define o polinômio interpolador usando o quadro a seguir, lançando os coeficientes e o termo constante de cada $f\left(x_n\right)L_n\left(x\right)$ e realizando a somatória.

$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_n\right)\boldsymbol{L}_n\left(\boldsymbol{x}\right)$	$\boldsymbol{x}^2$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_0\right)\boldsymbol{L}_0\left(\boldsymbol{x}\right)$	+ 0,18	- 3,04	+ 12,5
$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_1\right)\boldsymbol{L}_1\left(\boldsymbol{x}\right)$	- 0,75	+ 9,75	- 22,5
$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_2\right)\boldsymbol{L}_2\left(\boldsymbol{x}\right)$	+ 0,52	- 5,24	+11
$\sum\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_n\right)\boldsymbol{L}_n\left(\boldsymbol{x}\right)$	**+ 0,05**	**+ 1,47**	**+ 1**

$$\boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{x}\right)=-0,05\boldsymbol{x}^2+1,47\boldsymbol{x}+1$$

Com a teoria exemplificada, este é o momento de você testar seu aprendizado.

Faça você mesmo

Dados os pares ordenados a seguir, determine o valor de $f(12,32)$, usando a interpolação de Lagrange.

x	8	13	17
$f(x)$	20	12	6

Sem medo de errar

Com o conhecimento que você adquiriu sobre a Interpolação na forma de Lagrange, vamos calcular o valor do orçamento da venda de sucata de ferro solicitada pela empresa de fundição. Coloque-se no lugar do vendedor Bruno e apresente o valor da venda.

Solução:

Lembre-se que determinar o preço de 7,45 toneladas de sucata de ferro é mesmo que calcular $f(7,45)$.

Assim:

k	x_n	$f(x_n)$
0	5	195
1	9	225
2	12	240

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-9)(x-12)}{(5-9)(5-12)}$$

$$f(x_0)L_0(x)=195\cdot\frac{(x-9)(x-12)}{(5-9)(5-12)}$$

$$\boldsymbol{f\left(x_0\right)L_0\left(x\right)}=6,96\boldsymbol{x}^2-146,25\boldsymbol{x}+752,14$$

$$L_1\left(x\right)=\frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_2\right)}{\left(x_1-x_0\right)\left(x_1-x_2\right)}=\frac{\left(x-5\right)\left(x-12\right)}{\left(9-5\right)\left(9-12\right)}$$

$$f\left(x_1\right)L_1\left(x\right)=225\frac{\left(x-5\right)\left(x-12\right)}{\left(9-5\right)\left(9-12\right)}$$

$$\boldsymbol{f\left(x_1\right)L_1\left(x\right)}=-18,75\boldsymbol{x}^2+318,75\boldsymbol{x}-1125$$

$$L_2\left(x\right)=\frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)}{\left(x_2-x_0\right)\left(x_2-x_1\right)}=\frac{\left(x-5\right)\left(x-9\right)}{\left(12-5\right)\left(12-9\right)}$$

$$f\left(x_2\right)L_2\left(x\right)=240\frac{\left(x-5\right)\left(x-9\right)}{\left(12-5\right)\left(12-9\right)}$$

$$\boldsymbol{f\left(x_2\right)L_2\left(x\right)}=11,43\boldsymbol{x}^2-160\boldsymbol{x}+514,29$$

$\boldsymbol{f\left(x_n\right)L_n\left(x\right)}$	$\boldsymbol{x}^2$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{f\left(x_0\right)L_0\left(x\right)}$	+ 6,96	- 146,25	+ 752,14
$\boldsymbol{f\left(x_1\right)L_1\left(x\right)}$	- 18,75	+ 318,75	- 1125,00
$\boldsymbol{f\left(x_2\right)L_2\left(x\right)}$	+ 11,43	- 160	+ 514,29
$\boldsymbol{\sum f\left(x_n\right)L_n\left(x\right)}$	**- 0,36**	**+ 12,50**	**+ 141,43**

$\boldsymbol{p\left(x\right)}=-0,36\boldsymbol{x}^2+12,50\boldsymbol{x}+141,43\Rightarrow$ Polinômio Interpolador de Lagrange

Portanto, $\boldsymbol{f}\left(7,45\right)=\boldsymbol{p}\left(7,45\right)=214,57$ **mil reais**

Desse modo, a empresa de fundição terá de pagar 214,57 mil reais por 7,45 toneladas de sucata de ferro.

Note que a conclusão anterior é a mesma da seção 3.1.

Atenção!

Para que você tenha um embasamento maior, veja o seguinte *link*:

<http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap115s1.html>. Acesso em: 20 ago. 2015.

Lembre-se

A interpolação na forma de Lagrange é definida pelas equações a seguir:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x)$$

Avançando na prática

Pratique mais	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.	
Forma de Lagrange para o polinômio interpolador	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer o cálculo numérico.
2. Objetivos de aprendizagem	Obter o polinômio interpolador e calcular o valor y correspondente a um x não tabelado.
3. Conteúdos relacionados	Interpolação na forma de Lagrange

4. Descrição da situação-problema

Uma distribuidora de sílica, material muito utilizado na fabricação de vidro, apresenta seu quadro de preços de venda a seguir:

Tabela 3.14 | Preço da sílica

x	Toneladas de Ferro	1	4	10
$f(x)$	Preço de Venda [Mil Reais]	150	350	450

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma indústria de vidros solicita um orçamento para a compra de 8,5 toneladas de sílica. Usando a interpolação na forma de Lagrange, determine o preço de venda.

5. Resolução da situação-problema

Como solicitado, aplicaremos a Interpolação na forma de Lagrange na resolução, como segue:

k	x_n	$f(x_n)$
0	5	195
1	9	225
2	12	240

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-4)(x-10)}{(1-4)(1-10)}$$

$$f(x_0)L_0(x)=150\cdot\frac{(x-4)(x-10)}{(1-4)(1-10)}$$

$$\boldsymbol{f(x_0)L_0(x)}=5,56\boldsymbol{x}^2-77,78\boldsymbol{x}+222,22$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-1)(x-10)}{(4-1)(4-10)}$$

$$f(x_1)L_1(x)=350\frac{(x-1)(x-10)}{(4-1)(4-10)}$$

$$\boldsymbol{f(x_1)L_1(x)}=-19,44\boldsymbol{x}^2+213,88\boldsymbol{x}-194,44$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1)(x-4)}{(10-1)(10-4)}$$

$$f(x_2)L_2(x)=450\frac{(x-1)(x-4)}{(10-1)(10-4)}$$

$$\boldsymbol{f(x_2)L_2(x)=8,33x^2-41,67x+33,33}$$

$\boldsymbol{f(x_n)L_n(x)}$	$\boldsymbol{x^2}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{f(x_0)L_0(x)}$	+ 5,56	- 77,78	+ 222,22
$\boldsymbol{f(x_1)L_1(x)}$	- 19,44	+ 213,88	- 194,44
$\boldsymbol{f(x_2)L_2(x)}$	+ 8,33	- 41,67	+ 33,33
$\boldsymbol{\sum f(x_n)L_n(x)}$	**- 5,55**	**+ 94,43**	**+ 61,11**

$\boldsymbol{p(x)=-5,55x^2+94,43x+61,11\Rightarrow}$ Polinômio Interpolador de Lagrange

Portanto, $\boldsymbol{f(8,5)=p(8,5)=462,78}$ **mil reais**

Portanto, a indústria de vidros terá de pagar 462,78 mil reais por 8,5 toneladas de sílica.

Lembre-se

Reforce o seu conhecimento por meio do seguinte *link*:

<http://www.icmc.usp.br/~andretta/ensino/aulas/sme0500-1-12/iplagrange.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2015.

Faça você mesmo

Dado o quadro de pares ordenados abaixo, determine $f(4,5)$, fazendo uso do polinômio interpolador de Lagrange.

x	1	3	6	8
$f(x)$	2	7	10	11

Faça valer a pena

1. Dado o quadro abaixo, calcule $f(-0,7)$ utilizando a interpolação na forma de Lagrange.

x	- 1	0	3
$f(x)$	- 10	- 5	-1

a) $f(-0,7) = -10,00$.

b) $f(-0,7) = -9,31$.

c) $f(-0,7) = -9,52$.

d) $f(-0,7) = -8,31$.

e) $f(-0,7) = -6,92$.

2. Dado o quadro abaixo, calcule $f(-1,82)$ utilizando a interpolação na forma de Lagrange.

x	- 6	- 2	- 1
$f(x)$	3	5	11

a) $f(-1,82) = 5,92$.

b) $f(-1,82) = 8,31$.

c) $f(-1,82) = 10,32$.

d) $f(-1,82) = 5,41$.

e) $f(-1,82) = 10,99$.

3. Determine o valor de $f(2{,}81)$ utilizando a interpolação na forma de Lagrange para o quadro a seguir.

x	2	5	8
$f(x)$	-15	-12	-3

a) $f(2{,}81) = -10{,}00$.

b) $f(2{,}81) = -12{,}32$.

c) $f(2{,}81) = -14{,}80$.

d) $f(2{,}81) = -10{,}31$.

e) $f(2{,}81) = -12{,}22$.

4. Dado o quadro abaixo, determine o valor de $f(5{,}17)$ utilizando a interpolação na forma de Lagrange.

x	2	4	8
$f(x)$	-3	4	7

a) $f(5{,}17) = 6{,}35$.

b) $f(5{,}17) = 4{,}63$.

c) $f(5{,}17) = 5{,}02$.

d) $f(5{,}17) = 4{,}17$.

e) $f(5{,}17) = 5{,}17$.

5. Utilizando a interpolação na forma de Lagrange, para o quadro abaixo, determine o valor de $f(7{,}5)$.

x	3	8	10
$f(x)$	5	3	- 4

a) $f(7{,}5) = 4{,}35$.

b) $f(7{,}5) = 3{,}02$.

c) $f(7{,}5) = 4{,}96$.

d) $f(7{,}5) = 3{,}22$.

e) $f(7{,}5) = 3{,}78$.

6. Utilizando a interpolação na forma de Lagrange, para o quadro abaixo, determine o valor de $f(3{,}5)$.

x	1	2	5	9
$f(x)$	1	7	97	609

7. Utilizando a interpolação na forma de Lagrange, para o quadro abaixo, determine o valor de $f(6{,}39)$.

x	2	3	5	9
$f(x)$	8	15	36	112

Seção 3.3

Forma de Newton para o polinômio interpolador

Diálogo aberto

Caro aluno,

Nesta seção, novamente trataremos da interpolação, mas fazendo uso do polinômio interpolador de Newton. Além disso, mais uma vez desenvolveremos a resolução do problema do orçamento de venda de sucata ferro, apresentado no início desta unidade.

Uma fundição solicita um orçamento para a compra de 7,45 toneladas de sucata de ferro, e o vendedor Carlos apresenta o orçamento calculando o preço através do polinômio interpolador de Newton.

Coloque-se agora no lugar do Carlos: o que você precisa saber para resolver esse problema usando cálculo numérico com o polinômio interpolador de Newton?

Ao final desta seção, esperamos que você conclua que, para resolver o problema, teremos de conhecer aspectos teóricos relacionados ao método polinômio interpolador de Newton.

Não pode faltar

Atenção!

Todos os cálculos efetuados nesta seção serão arredondados com duas casas decimais, exceto quando for descrito o critério de arredondamento.

O polinômio interpolador de Newton $p(x)$ para $f(x)$ em $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$, sendo $n+1$ pontos distintos, é dado por:

$$p(x)=d_0+d_1(x-x_0)+d_1(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+d_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

Onde $p(x)$ é definido por uma série de diferenças divididas de ordem k e os d_k são os coeficientes.

O operador das diferenças divididas é definido:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	$\cdots$	Ordem n
	$f(x_0)=$					
x_0						
	$\boldsymbol{d_0}$					
		$f[x_0,x_1]=$				
		$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=$				
		$\boldsymbol{d_1}$				
			$f[x_0,x_1,x_2]=$			
x_1	$f(x_1)$		$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=$			
			$\boldsymbol{d_2}$			
				$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=$		
		$f[x_1,x_2]=$				
					$\ddots$	
		$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$		$\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$		
				$\boldsymbol{d_3}$		
			$f[x_1,x_2,x_3]=$			
				$\vdots$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n]=$ $\boldsymbol{d_n}$
x_2	$f(x_2)$					
			$\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$			
		$f[x_2,x_3]=$				
			$\vdots$	$f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	$\iddots$	
		$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$				

x_3	$f(x_3)$	$\vdots$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$
$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-1},x_n]$	
x_n	$f(x_n)$		

A diferença dividida de ordem n, ou seja, d_n, é dada por:

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n]=\frac{f[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n]-f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}=\boldsymbol{d_n}.$$

Assimile

O polinômio interpolador de Newton é dado por:

$$p(x)=d_0+d_1(x-x_0)+d_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+d_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

Pesquise mais

Para facilitar sua compreensão, veja o seguinte *link*:

<www.youtube.com/watch?v=fr1oGgA7QxU>. Acesso em: 25 ago. 2015.

Para contribuir com uma compreensão mais tranquila, vamos desenvolver algebricamente as diferenças divididas de até ordem 3.

n	x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0	x_0	$\boldsymbol{f(x_0)}$			
			$\boldsymbol{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}$		
1	x_1	$f(x_1)$		$\boldsymbol{\frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}}$	

			$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$		$\frac{\frac{\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}-\frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}}{x_3-x_0}$
2	x_2	$f(x_2)$		$\frac{\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}$	
			$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$		
3	x_3	$f(x_3)$			

Agora que você conheceu o operador diferenças divididas e o polinômio interpolador de Newton, veja um exemplo, pois isso o ajudará a sanar suas dúvidas.

Exemplificando

Dado o quadro abaixo com os pares ordenados de $f(x)$, usando o polinômio interpolador de Newton, determine $f(4,5)$.

x	1	4	6
$f(x)$	2	10	12

Resolução:

Primeiramente, determinamos as diferenças divididas até ordem 2, como apresentado no quadro abaixo:

n	x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
0	1	2 d_0		
			$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{10-2}{4-1}=2,67$ d_1	
1	4	10		$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{1-2,67}{6-1}=-0,33$ d_2

			$f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{12-10}{6-4}=1$	
2	6	12		

Conhecendo as diferenças divididas, escrevemos o polinômio interpolador, conforme apresentado a seguir:

$$p(x)=d_0+d_1(x-x_0)+d_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$$p(x)=2+2,67(x-1)-0,33(x-1)(x-4)$$

$$p(x)=-0,33x^2+4,32x-1,99$$

Conhecendo o polinômio $p(x)$, podemos agora estimar $f(4,5)$, como segue:

$$\boldsymbol{f}(4,5)\cong \boldsymbol{p}(4,5)=10,77$$

Com a teoria exemplificada, este é o momento de você testar seu aprendizado.

Faça você mesmo

Dado o quadro abaixo, com os pares ordenados de $f(x)$, determine $f(10)$ usando o polinômio interpolador de Newton.

x	5	9	12
$f(x)$	-4	-2	12

Sem medo de errar

Conhecendo a interpolação na forma de Newton, vamos calcular o valor do orçamento da venda de sucata de ferro solicitada pela empresa de fundição. Coloque-se no lugar do vendedor Carlos e apresente o valor da venda.

Solução:

Determinar o preço de 7,45 toneladas de sucata de ferro é o mesmo que calcular $f(7{,}45)$.

Assim:

n	x_n	$f(x_n)$
0	5	195
1	9	225
2	12	240

n	x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
0	5	195 $\boldsymbol{d_0}$		
			$f[x_0,x_1]=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=7{,}5$ $\boldsymbol{d_1}$	
1	9	225		$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=-0{,}36$ $\boldsymbol{d_2}$
			$f[x_1,x_2]=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=5$	
2	12	240		

$$p(x)=d_0+d_1(x-x_0)+d_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$$p(x)=195+7{,}5(x-5)-0{,}36(x-5)(x-9)$$

$$p(x)=-0{,}36x^2+12{,}54x-141{,}3$$

$$\boldsymbol{f}(7{,}45)\cong\boldsymbol{p}(7{,}45)=214{,}74$$

Portanto, a empresa de fundição terá de pagar 214,74 mil reais por 7,45 toneladas de sucata de ferro.

Pesquise mais

Para ampliar seus conhecimentos, veja o seguinte *link*:

<http://wwwp.fc.unesp.br/~arbalbo/Iniciacao_Cientifica/interpolacao/teoria/1_Interpol_polinomial_Met_Lagrange_Newton.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2015.

Lembre-se

A interpolação na forma de Newton é definida por:

$$p(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_1(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

em que os d_i são obtidos por meio do cálculo de diferenças divididas.

Avançando na prática

<table>
<tr><th colspan="2">Pratique mais</th></tr>
<tr><td colspan="2">Instrução
Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Forma de Newton para o polinômio interpolador</td></tr>
<tr><td>1. Competência de fundamentos de área</td><td>Conhecer o cálculo numérico.</td></tr>
<tr><td>2. Objetivos de aprendizagem</td><td>Obter o polinômio interpolador e calcular o valor y correspondente a um x não tabelado.</td></tr>
<tr><td>3. Conteúdos relacionados</td><td>Interpolação da forma de Newton.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>4. Descrição da situação-problema</td>
<td>
Uma distribuidora de sílica, material muito utilizado na fabricação de vidro, apresenta seu quadro de preços de venda a seguir:

Tabela 3.14 | Preço da sílica
<table>
<tr><td>x</td><td>Toneladas de Ferro</td><td>1</td><td>4</td><td>10</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>Preço de Venda [Mil Reais]</td><td>50</td><td>120</td><td>200</td></tr>
</table>
Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma indústria de vidros solicita um orçamento para a compra de 8,5 toneladas de sílica. Usando a interpolação na forma de Newton, determine o preço de venda.
</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Resolução da situação-problema</td>
<td>
Na resolução como solicitado, aplicaremos a interpolação na forma de Newton, como apresentada abaixo:
<table>
<tr><th>k</th><th>x_n</th><th>$f(x_n)$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>50</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>120</td></tr>
<tr><td>2</td><td>10</td><td>200</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>n</th><th>x</th><th>Ordem 0</th><th>Ordem 1</th><th>Ordem 2</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>50
d_0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>$f[x_0,x_1]=$
$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=23,33$
$\boldsymbol{d}_1$</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>120</td><td></td><td>$f[x_0,x_1,x_2]=$
$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=-1,11$
$\boldsymbol{d}_2$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>$f[x_1,x_2]=$
$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=13,33$</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>10</td><td>200</td><td></td><td></td></tr>
</table>

$$p(x)=d_0+d_1(x-x_0)+d_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$$p(x)=50+23,33(x-1)-1,11(x-1)(x-4)$$

$$p(x)=-1,11x^2+28,88x+22,23$$
</td>
</tr>
</table>

	$\boldsymbol{f}(8,5) \cong \boldsymbol{p}(8,5) = 187,51$ Resposta: a indústria de vidros terá de pagar 187,51 mil reais por 8,5 toneladas de sílica.

Pesquise mais

A seguir, há mais um *link* para que você aprimore seu conhecimento:

<http://homepages.dcc.ufmg.br/~nivio/cursos/pa02/seminarios/seminario6/seminario6.html>. Acesso em: 25 ago. 2015.

Faça você mesmo

Uma partícula tem seu descolamento $f(x)$, em metros, em função do tempo $\boldsymbol{x}$, em segundos, conforme quadro abaixo. Determine sua posição $f(x)$ no instante $\boldsymbol{x} = 4,5\boldsymbol{s}$, aplicando a interpolação de Newton.

$x_n[s]$	$f(x_n)[m]$
1	1
4	2
7	4
10	8

Portanto, no instante $\boldsymbol{x} = 4,5\boldsymbol{s}$ a partícula ocupa a posição $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 2,22\,\boldsymbol{m}$.

Faça valer a pena

1. Dado o quadro abaixo, calcule $f\left(-0,3\right)$ utilizando a interpolação na forma de Newton

x	- 1	1	3
$f\left(x\right)$	- 10	- 5	1

a) $f\left(-0,3\right)=-10,00$.

b) $f\left(-0,3\right)=-9,31$.

c) $f\left(-0,3\right)=-7,52$.

d) $f\left(-0,3\right)=-7,31$.

e) $f\left(-0,3\right)=-8,37$.

2. Dado o quadro abaixo, calcule $f\left(-1,22\right)$ utilizando a interpolação na forma de Newton.

x	- 6	- 2	- 1
$f\left(x\right)$	3	8	11

a) $f\left(-1,22\right)=10,28$.

b) $f\left(-1,22\right)=7,31$.

c) $f\left(-1,22\right)=10,92$.

d) $f\left(-1,22\right)=8,45$.

e) $f\left(5\right)=-10,25$.

3. Determine o valor de $f\left(5\right)$ utilizando a interpolação na forma de Newton para o quadro a seguir.

x	2	7	8
$f\left(x\right)$	-15	-8	-3

a) $f(5) = -10,25$.

b) $f(5) = -11,32$.

c) $f(5) = -11,21$.

d) $f(5) = -14,40$.

e) $f(5) = -12,22$.

4. Dado o quadro abaixo, calcule $f(7)$ utilizando a interpolação na forma de Newton.

x	2	6	9
$f(x)$	-5	3	7

a) $f(7) = 6,85$.

b) $f(7) = 4,50$.

c) $f(7) = 5,65$.

d) $f(7) = 3,17$.

e) $f(7) = 6,17$.

5. Utilizando a interpolação na forma de Newton, para o quadro abaixo, determine o valor de $f(2,5)$.

x	1	8	10
$f(x)$	4	3	-2

a) $f(2,5) = -1,98$.

b) $f(2,5) = 3,21$.

c) $f(2,5) = -1,89$.

d) $f(2,5) = 5,94$.

e) $f(2,5) = -1,00$.

6. Utilizando a interpolação na forma de Newton, para o quadro abaixo, determine o valor de $f(4,8)$.

x	1	2	5	10
$f(x)$	1	7	100	600

7. Utilizando a interpolação na forma de Newton, para o quadro abaixo, determine o valor de $f(6,39)$.

x	-3	-1	5	10
$f(x)$	10	50	100	600

Seção 3.4

Estudo do erro na interpolação pelo método de Newton

Diálogo aberto

Caro aluno,

Estudaremos o erro proveniente do uso da interpolação na determinação de uma estimativa. Isso ocorre porque o polinômio interpolador é uma função aproximada, ou simplificada, da função original.

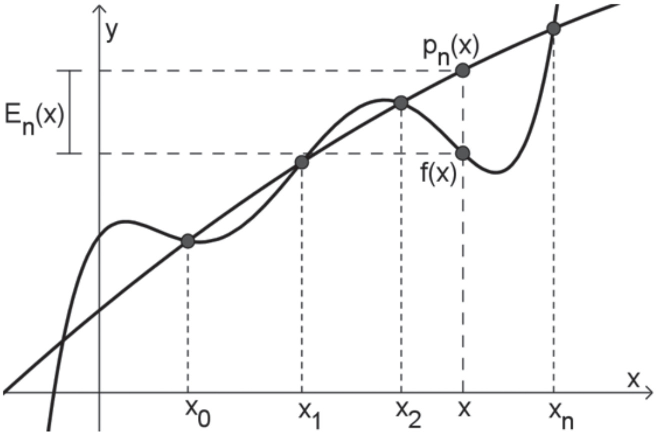
Para compreendermos o contexto em que o estudo do erro se aplica, lembre-se de que os vendedores Arnaldo, Bruno e Carlos apresentaram o orçamento para 7,45 toneladas de sucata de ferro. Para complementar o trabalho realizado por esses vendedores, o quarto vendedor, Dagoberto, deve verificar o erro cometido ao determinar o orçamento da venda de sucata. Para isso, decidiu utilizar o orçamento apresentado por Carlos e o método de Newton.

Coloque-se no lugar de Dagoberto e imagine: o que é necessário compreender para estimar o erro? Ao final desta seção, esperamos que você compreenda os aspectos teóricos que embasam a estimação do erro e que isso colabore para que você resolva o problema de Dagoberto.

Não pode faltar

O erro na interpolação ocorre porque o polinômio interpolador é uma função aproximada, ou simplificada, da função original. Observe o Gráfico 3.2, que exemplifica graficamente o erro na interpolação.

Gráfico 3.2 | Erro em função de uma interpolação



Fonte: Elaborada pelo autor.

No Gráfico 3.2, temos:

$f(x) =$ Resultado obtido a partir de x pela função original f;

$p_n(x) =$ Resultado obtido a partir de x pelo polinômio interpolador p_n;

$E_n(x) =$ Erro proveniente da interpolação para x. O sub-índice n em $E_n(x)$ indica a ordem do polinômio interpolador.

Assimile

O erro é a diferença entre o valor real $f(x)$ e o valor interpolado $p_n(x)$:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

Como apresentado no Gráfico 3.2 e descrito anteriormente, o erro é a diferença entre o valor real $f(x)$ e o valor interpolado $p_n(x)$, sendo que isso quando conhecemos a função original $f(x)$. Mas, comumente, não temos o conhecimento da função $f(x)$ e isso não nos impede de estimar o erro causado por uma interpolação.

O nosso estudo se baseia nessa situação, na qual temos só o conhecimento dos n pares ordenados $(x, f(x))$ e obtemos a interpolação para $f(x)$ com a estimativa do respectivo erro.

Conhecendo apenas os n pontos de interpolação, o erro poderá ser estimado fazendo uso das diferenças divididas, estudadas na seção 3.3, sendo a estimativa para $\left|E_n(x)\right|$ expressa por:

$$\left|E_n(x)\right| \cong \left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\right| \cdot \left(\textit{máx}\ |\textit{diferenças divididas de ordem}\ n+1|\right),$$

onde $\textit{máx}\ |\textit{diferenças divididas de ordem}\ n+1|$ é o máximo valor absoluto das diferenças divididas de ordem $n+1$.

A estimativa do erro tem grande aplicabilidade em situações em que a quantidade de pares ordenados $(x, f(x))$ tabelados é muito grande e, por isso, na interpolação não utilizamos todos os pontos, buscando um polinômio de menor grau que atenda à necessidade.

Assimile

O erro estimado é utilizado quando não conhecemos a função $f(x)$, e será dado por:

$$\left|E_n(x)\right| \cong \left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\right| \cdot (\textit{máx}\ |\textit{diferenças divididas de ordem}\ n+1|)$$

Pesquise mais

Leia um pouco mais sobre a estimativa do erro na interpolação pelo método de Newton em:

<http://wwwp.fc.unesp.br/~arbalbo/Iniciacao_Cientifica/interpolacao/teoria/2_Forma_de_NewtonGregory.pdf>. Acesso em: 26 ago. 2015.

Conhecendo a expressão que estima o erro na interpolação de Newton, veja um exemplo que poderá esclarecer suas dúvidas:

Exemplificando

Dado o quadro de pares ordenados $(x, f(x))$ a seguir, determine o valor de $f(7,32)$ pela interpolação de ordem 2 na forma de Newton e estime o erro. Para a construção do polinômio interpolador, utilize apenas os valores 4, 7 e 9 para x.

x	2	4	7	9	13	16
$f(x)$	1	2	3	6	10	15

Resolução:

Agora, vamos estimar o erro para a aproximação $f(7,32) \cong p_2(7,32)$, conforme segue:

$$|E_n(x)| \cong |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \cdot (\textit{máx}\ |\textit{diferenças divididas de ordem}\ n+1|)$$

Como o polinômio interpolador $p_2(x)$ aplicado foi de ordem 2, $n=2$, então faremos as diferenças divididas de ordem 3, $n+1 \Rightarrow 2+1=3$. O cálculo das diferenças divididas foi apresentado na seção 3.3.

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
2	1			
		0,50		
4	2		-0,03	
		0,33		0,04
7	3		0,23	
		1,50		-0,04
9	6		-0,08	
		1,00		0,02
13	10		0,10	
		1,67		
16	15			

Note que, para a estimação do erro, utilizamos todos os pares ordenados $(x, f(x))$ tabelados e não somente os utilizados para a determinação de $p_2(x)$.

$$máx\,|diferenças\ divididas\ de\ ordem\ 3| = |0,04| = 0,04$$

Lembre-se de que o polinômio interpolador $p_2(x)$ foi obtido considerando $x_0 = 4$, $x_1 = 7$ e $x_2 = 9$, valores que também são utilizados para estimar a magnitude do erro $|E_2(x)|$ para $f(7,32) \cong p_2(7,32)$.

$$|E_n(x)| \cong |(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)| \cdot (máx\ |diferenças\ divididas\ de\ ordem\ n+1|)$$

$$|E_2(x)| \cong |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| \cdot (máx\ |diferenças\ divididas\ de\ ordem\ 3|)$$

$$|E_2(x)| \cong |(x-4)(x-7)(x-9)| \cdot 0,04$$

$$|E_2(x)| \cong |0,04x^3 - 0,8x^2 + 5,08x - 10,08|$$

$$|E_2(7,32)| \cong |0,04 \cdot 7,32^3 - 0,8 \cdot 7,32^2 + 5,08 \cdot 7,32 - 10,08|$$

$$|E_2(7,32)| \cong |-0,07|$$

$$|E_2(7,32)| \cong 0,07$$

Portanto, ao aproximar $f(7,32)$ por $p_2(7,32)$ utilizando $x_0 = 4$, $x_1 = 7$ e $x_2 = 9$ para realizar a interpolação, a estimativa de erro é $|E_2(7,32)| \cong 0,07$.

Você acompanhou o exemplo. Agora, procure fazer a atividade a seguir para se certificar que não restaram dúvidas.

Faça você mesmo

Dado o quadro de pares ordenados $(x, f(x))$ a seguir, estime o erro da interpolação para $f(9)$ na forma de Newton, sendo que ela será de ordem 2 com $x = 8$, 10 e 13.

x	1	4	8	10	13	16
$f(x)$	1	2	5	8	14	20

Sem medo de errar

Conhecendo o cálculo da estimativa do erro na interpolação na forma de Newton, vamos estimar o valor do erro no orçamento da venda de sucata de ferro apresentado por Carlos. Coloque-se no lugar do vendedor Dagoberto e apresente o erro estimado do valor da venda, sabendo que o vendedor tem acesso a um quadro com um número maior de preços de venda, como apresentado abaixo:

x	Toneladas de Ferro	1	5	9	12	15
$f(x)$	Preço de Venda [Mil Reais]	193	195	225	240	270

Lembre-se de que o polinômio interpolador $p_2(x) = -0,36x^2 + 12,54x - 141,3$ obtido por Carlos foi de ordem 2, isto é, $n = 2$. Desse modo, as diferenças divididas que serão utilizadas na estimação do erro são de ordem 3, pois $n+1 = 2+1 = 3$. O cálculo das diferenças divididas foi apresentado na seção 3.3.

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	193			
		0,50		
5	195		0,88	
		7,50		-0,11
9	225		-0,36	
		5,00		0,12
12	240		0,83	
		10,00		
15	270			

$$máx\ |diferenças\ divididas\ de\ ordem\ 3| = |0,12| = 0,12$$

Recorde-se de que o polinômio interpolador $p_2(x)$ foi obtido considerando $x_0 = 5$, $x_1 = 9$ e $x_2 = 12$. Esses mesmos valores serão utilizados novamente para definir o polinômio de estimativa do erro $|E_2(x)|$ para $f(7,45) \cong p_2(7,45)$.

$$|E_n(x)| \cong |(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)| \cdot (máx\ |diferenças\ divididas\ de\ ordem\ n + 1|)$$

$$|E_2(x)| \cong |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| \cdot (máx\ |diferenças\ divididas\ de\ ordem\ 3|)$$

$$|E_2(x)| \cong |(x - 5)(x - 9)(x - 12)| \cdot 0,12$$

$$|E_2(x)| \cong |0,12x^3 - 3,12x^2 + 25,56x - 64,8|$$

$$|E_2(7,45)| \cong |0,12 \cdot 7,45^3 - 3,12 \cdot 7,45^2 + 25,56 \cdot 7,45 - 64,8|$$

$$|E_2(7,45)| \cong |2,07|$$

$$|E_2(7,45)| \cong 2,07$$

Atenção!

Reforce seu conhecimento por meio do seguinte *link*:

<http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/julia/materiais/main_CAN_interpolacao_e_ajuste.pdf>. Acesso em: 27 ago. 2015.

Lembre-se

O erro de interpolação na Forma de Newton é dado por:

$$|E_n(x)| \cong |(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)| \cdot (máx\ |diferenças\ divididas\ de\ ordem\ n + 1|)$$

Avançando na prática

Pratique mais

Instrução

Desafiamos você a praticar o que aprendeu, transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.

Estudo do erro na interpolação

1. Competência de fundamentos de área	Conhecer o cálculo numérico.
2. Objetivos de aprendizagem	Estimar o erro por realizar uma interpolação.
3. Conteúdos relacionados	Estudo do erro resultante de uma interpolação.

4. Descrição da situação-problema

Veja abaixo o quadro de temperaturas para alguns dias de julho de 2015, numa determinada região. O dia do mês é representado por x e a temperatura por $f(x)$, em graus Celsius.

x	1	2	5	7	12	18
$f(x)$	10	11	15	22	27	28

Determine o erro de interpolação para a estimativa de temperatura do sexto dia do mês, ou seja, $f(6)$, sabendo que interpolação será de ordem 2, usando $x = 5$, 7 e 12.

5. Resolução da situação-problema

Vamos iniciar a resolução calculando as diferenças divididas, estudadas na seção 3.3.

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	10			
		1		
2	11		0,08	
		1,33		0,06
5	15		0,43	
		3,5		-0,08
7	22		-0,36	
		1		0,02
12	27		-0,08	
		0,17		
18	28			

$$\text{máx } |\text{diferenças divididas de ordem } n+1| = |-0,08| = 0,08$$

	O polinômio interpolador $p_2(x)$ será obtido considerando $x_0 = 5,\ x_1 = 7$ e $x_2 = 12$, que manteremos para definir o polinômio de estimativa do erro $\left\lvert E_2(x) \right\rvert$ para $f(6) \cong p_2(6)$. $\left\lvert E_n(x) \right\rvert \cong \left\lvert (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \right\rvert$ $(\textit{máx }\lvert\textit{diferenças divididas de ordem } n+1\rvert)$ $\left\lvert E_2(x) \right\rvert \cong \left\lvert (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \right\rvert$ $(\textit{máx }\lvert\textit{diferenças divididas de ordem } 3\rvert)$ $\left\lvert E_2(x) \right\rvert \cong \left\lvert (x-5)(x-7)(x-12) \right\rvert \cdot 0,08$ $\left\lvert E_2(x) \right\rvert \cong \left\lvert 0,08x^3 - 1,92x^2 + 14,32x - 33,6 \right\rvert$ $\left\lvert E_2(6) \right\rvert \cong \left\lvert 0,08 \cdot 6^3 - 1,92 \cdot 6^2 + 14,32 \cdot 6 - 33,6 \right\rvert$ $\left\lvert E_2(6) \right\rvert \cong \left\lvert 0,48 \right\rvert$ $\left\lvert E_2(6) \right\rvert \cong 0,48$ Resposta: o valor interpolado $f(6) \cong p_2(6)$ apresentará uma estimativa de erro $\left\lvert E_2(6) \right\rvert \cong 0,48^o C$.

Lembre-se

Complemente seus estudos sobre o erro de interpolação a partir do *link* a seguir:

<http://wwwp.fc.unesp.br/~arbalbo/Iniciacao_Cientifica/interpolacao/teoria/2_Forma_de_NewtonGregory.pdf>. Acesso em: 31 ago. 2015.

Faça você mesmo

Uma caldeira, quando acionada, aquece a água $[^{o}C]$ em função tempo $[s]$, conforme o quadro abaixo:

$x[s]$	1	3	7	10	13	17
$f(x)[^{o}C]$	1	2	6	12	20	35

Estime o erro cometido ao determinar a temperatura da água em para o tempo 8,5 s, ou seja, $f(8,5)$, utilizando a interpolação de Newton para $x = 3$, 7 e $10s$.

Faça valer a pena

Atenção!

Todos os cálculos deverão ser realizados com 4 casas decimais e a resposta aproximada com uma casa decimal.

1. Dado o quadro abaixo, calcule $E_2(-0,3)$ para a interpolação na forma de Newton, onde $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

x	- 3	- 1	1	3	7
$f(x)$	- 12	- 10	- 5	1	9

a) $E_2(-0,3) = 2,2$.

b) $E_2(-0,3) = 3,0$.

c) $E_2(-0,3) = 0,1$.

d) $E_2(-0,3) = 2,0$.

e) $E_2(-0,3) = 4,1$.

2. Dado o quadro abaixo, calcule $E_2(-1,22)$ para a interpolação na forma de Newton, onde $x_0 = -6$, $x_1 = -2$ e $x_2 = -1$.

x	- 10	- 6	- 2	- 1	2
$f(x)$	- 6	3	8	11	12

a) $E_2(-1,22) = 2,4$.

b) $E_2(-1,22) = 1,8$.

c) $E_2(-1,22) = 8,8$.

d) $E_2(-1,22) = 0,1$.

e) $E_2(-1,22) = 10,2$.

3. Dado o quadro abaixo, calcule $E_2(5)$ para a interpolação na forma de Newton, onde $x_0 = 2$, $x_1 = 7$ e $x_2 = 8$.

x	-6	2	7	8	22
$f(x)$	-25	-15	-8	-3	0

a) $E_2(5) = 0,8$.

b) $E_2(5) = 7,0$.

c) $E_2(5) = 3,5$.

d) $E_2(5) = 4,7$.

e) $E_2(5) = 9,0$.

4. Dado o quadro abaixo, calcule $E_2(7)$ para a interpolação na forma de Newton, onde $x_0 = 2$, $x_1 = 6$ e $x_2 = 9$.

x	-10	2	6	9	20
$f(x)$	-7	-5	3	7	12

a) $E_2(7) = 9,0$.

b) $E_2(7) = 7,2$.

c) $E_2(7) = 2,3$.

d) $E_2(7) = 1,8$.

e) $E_2(7) = 0,1$.

5. Dado o quadro abaixo, calcule $E_2(2,5)$ para a interpolação na forma de Newton, onde $x_0 = 1$, $x_1 = 8$ e $x_2 = 10$.

x	0	1	8	10	20
$f(x)$	1	4	3	-2	12

a) $E_2(2,5) = 9,2$.

b) $E_2(2,5) = 1,9$.

c) $E_2(2,5) = 4,8$.

d) $E_2(2,5) = 6,8$.

e) $E_2(2,5) = 5,3$.

6. Dado o quadro abaixo, calcule $E_3(4,8)$ para a interpolação na forma de Newton, onde $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ e $x_3 = 10$.

x	0	1	2	5	10
$f(x)$	0	1	7	100	600

7. Dado o quadro abaixo, calcule $E_3(6,39)$ para a interpolação na forma de Newton, onde $x_0 = -3$, $x_1 = -1$, $x_2 = 5$ e $x_3 = 10$.

x	-10	-3	-1	5	10	20	30
$f(x)$	5	10	50	100	600	700	900

Referências

ANDRETTA, M. **Interpolação polinomial**: polinômio de Lagrange, Disponível em <http://www.icmc.usp.br/~andretta/ensino/aulas/sme0500-1-12/iplagrange.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2015.

ARENALES, S.; DAREZZO, S. **Cálculo numérico**: aprendizagem com apoio de software. São Paulo: Thompson Learning, 2008.

DORN, W. S.; MCCRACKEN, D. D. **Cálculo numérico com estudos de casos de Fortran IV**. Rio de Janeiro: Campus, 1981.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo numérico**. São Paulo: Pearson, 2006.

PILLING, S. **Cálculo numérico**. Disponível em: <http://www1.univap.br/spilling/CN/CN_Capt4.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2015.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lucia da Rocha. **Cálculo numérico**: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Convite ao estudo

Caro aluno, nessa Unidade estudaremos Integração Numérica, que é uma técnica que nos permite obter o valor aproximado da integral de uma função $f(x)$ num intervalo $[a,b]$. Geralmente usamos essa técnica quando a integração da função $f(x)$, pelo método analítico, ou seja, por Cálculo Diferencial e Integral, não conseguimos expressar a função primitiva por meio de funções elementares.

Estudaremos a Integração Numérica pela Fórmula de Newton-Cotes, Regra do Trapézio e Regra de Simpson; como a integração numérica nos fornece um valor aproximado, também estudaremos o Erro na Integração Numérica.

A integração numérica tem grande aplicação nas áreas Sociais, Saúde, Tecnológicas, Econômicas, Financeiras e de Ciências Exatas. A seguir veremos uma situação hipotética que nos ajudará a desenvolver os conceitos e as técnicas com uma visão prática:

Uma cidade apresenta uma taxa de crescimento populacional $f(x)[mil\ habitantes/ano]$ em função do tempo $x[ano]$:

$$f(x) = 200 + e^{0,6x}$$

Três grandes lojistas, S & S Supermercados, Magazine Sul e KLM Veículos têm a intenção de implantarem filiais nessa cidade e, para isso, precisam conhecer qual será o crescimento populacional entre 3 e 4,5 anos. Para isso a S & S Supermercados fez uso da integração pela fórmula de Newton-Cote, a Magazine Sul aplicou a Regra do Trapézio e a KLM Veículos usou a

Regra de Simpson. A prefeitura local por sua vez apresentou o Estudo de Erro em função da Integração Numérica aplicada.

Em cada uma das seções seguintes você será convidado a se colocar no lugar de cada um dos lojistas e, ao final dessa unidade, você poderá responder a variação populacional buscada por eles, além de identificar as características de cada método e compreender as facilidades e dificuldades de utilização de cada um.

Seção 4.1

Fórmula de Newton-Cotes

Diálogo aberto

Aluno, a Integração Numérica é uma técnica muito utilizada nas áreas de Ciências Exatas, Tecnológicas, Econômicas e Financeiras.

Nessa seção trataremos da Integração Numérica fazendo uso da fórmula de Newton-Cotes e para isso desenvolveremos a resolução do problema do crescimento populacional apresentado anteriormente.

A Integração Numérica é uma técnica que permite obter o valor aproximado da integral de uma função $f(x)$, $\int_a^b f(x)\,dx$. Essa técnica se aplica quando $f(x)$ é uma função muito complexa e se torna muito trabalhosa a integração pelas técnicas do Cálculo Diferencial e Integral.

Para compreender melhor, vamos retomar o problema proposto no início dessa unidade: uma cidade apresenta uma taxa de crescimento populacional $f(x)[\textit{mil habitantes / ano}]$ em função do tempo $x[\textit{ano}]$:

$$f(x) = 200 + e^{0,6x}$$

O lojista S & S Supermercados tem a intenção de implantar filiais nessa cidade e, para isso, precisa conhecer qual será o crescimento populacional entre 3 e 4,5 anos. Para isso a S & S Supermercados fez uso da integração pela fórmula de Newton-Cotes.

Coloque-se no lugar da S & S Supermercados: o que você precisa saber para resolver esse problema usando cálculo numérico e, mais especificamente, da Integração pela Fórmula de Newton-Cotes?

Ao final dessa seção esperamos que você conclua que para resolver o problema teremos de conhecer aspectos teóricos relacionados à Integração pela Fórmula de Newton-Cotes.

A seguir veremos a teoria que nos ajudará a entender a técnica aqui comentada.

Não pode faltar

A integração pela fórmula de Newton-Cotes é baseada no polinômio interpolador de Lagrange $p_n(x)$, como vemos a seguir:

$$I_{NC}(f) = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b p_n(x)\,dx$$

Como visto na seção 3.2:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,L_i(x)$$

Assim:

$$I_{NC}(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)\,dx$$

onde x_i é definido em função da variação dada por $h = \frac{b-a}{n}$, onde n será o número de subintervalos que dividimos $[a,b]$. Então:

$$x_0 = a; x_1 = x_0 + h; \cdots ; x_n = x_{n-1} + h = b$$

Assimile

$$I_{NC}(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p_n(x)\,dx$$

Pesquise mais

Para se aprofundar nos conceitos relacionados à fórmula de Newton-Cotes, leia: <http://minerva.ufpel.edu.br/~rudi/grad/ModComp/MetNum/html/Apostilach3.html>. Acesso em: 12 set. 2015.

Vamos exemplificar a teoria, pois isso nos ajudará a compreender melhor a técnica em estudo:

Exemplificando

Calcule $\int_1^3 \frac{100}{x^2+5}dx$ fazendo uso da integração pela fórmula de Newton-Cotes para $n=2$.

Resolução:

Definindo $h=\frac{b-a}{n}$, temos:

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{2}=1$$

Assim, calculando x_i:

$x_0=a=1$; $x_1=x_0+1=2$ e $x_2=x_n=b=3$

Se desejamos $\int_1^3 \frac{100}{x^2+5}dx$, então $f(x)=\frac{100}{x^2+5}$.

Conhecendo $f(x)$, calculamos $f(x_i)$ em função de x_i.

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	16,67
1	2	11,11
2	3	7,14

Agora vamos calcular o polinômio interpolador de Lagrange, estudado na seção 3.2.

$$f(x_0)L_0(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$f(x_0)L_0(x) = 16,67 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$$

$$f(x_1)L_1(x) = f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$f(x_1)L_1(x) = 11,11\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$$

$$f(x_2)L_2(x) = f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$f(x_2)L_2(x) = 7,14\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

$\boldsymbol{f(x_n)L_n(x)}$	$\boldsymbol{x^2}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{f(x_0)L_0(x)}$	+8,34	-41.70	+50,04
$\boldsymbol{f(x_1)L_1(x)}$	-11,11	+44,44	-33,33
$\boldsymbol{f(x_2)L_2(x)}$	+3,57	-10,71	+7,14
$\boldsymbol{\sum f(x_n)L_n(x)}$	+0,80	-7,97	+23,86

$\boldsymbol{p(x)} = 0,80\boldsymbol{x}^2 - 7,97\boldsymbol{x} + 23,86 \Rightarrow$ Polinômio Interpolador de Lagrange.

Obtido o polinômio interpolador de Lagrange $p(x)$ podemos realizar a integração.

$$\int_1^3 \frac{100}{x^2+5}dx \cong \int_1^3 p(x)dx$$

$$\int_1^3 \frac{100}{x^2+5}dx \cong \int_1^3 \left(0,80x^2 - 7,97x + 23,86\right)dx =$$

$$\left(0,80\frac{x^{2+1}}{2+1} - 7,97\frac{x^{1+1}}{1+1} + 23,86x\right)\Bigg|_1^3$$

$$\left(0,27x^3 - 3,99x^2 + 23,86x\right)\Big|_1^3$$

$$(0{,}27 \cdot 3^3 - 3{,}99 \cdot 3^2 + 23{,}86 \cdot 3) - (0{,}27 \cdot 1^3 - 3{,}99 \cdot 1^2 + 23{,}86 \cdot 1) = 22{,}82$$

$$\therefore \int_1^3 \frac{100}{\boldsymbol{x}^2+5}\boldsymbol{dx} \cong 22,82$$

Lembre-se

Do cálculo diferencial e integral, sendo k, a e b constantes, temos:

$\int kdx = k\int dx = kx + c$, onde $c \in \mathbb{R}$;

$\int kx^n dx = k\int x^n dx = k\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, onde $c \in \mathbb{R}$;

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, ou seja, $F'(x) = f(x)$.

Caro aluno, convidamos você a resolver a atividade a seguir utilizando a mesma técnica; veja se entendeu o que lhe foi apresentado.

Faça você mesmo

Calcule $\int_2^3 \frac{2xe^x}{\ln(3x)}dx$ fazendo uso da integração pela fórmula de Newton-Cotes para $n = 2$.

Resposta: $\int_{2}^{3} \frac{2xe^{x}}{\ln(3x)} dx \cong 32,03$

Sem medo de errar

Vamos relembrar do problema proposto inicialmente: uma cidade apresenta uma taxa de crescimento populacional $f(x)[mil\ habitantes / ano]$ em função do tempo $x[ano]$:

$$f(x) = 200 + e^{0,6x}$$

O lojista S & S Supermercados tem a intenção de implantar filiais nessa cidade e, para isso, precisa conhecer qual será o crescimento populacional entre 3 e 4,5 anos. Para isso a empresa S & S Supermercados fez uso da integração pela fórmula de Newton-Cotes, onde tempo x varia de 0,5 em 0,5 ano, ou seja, $h = 0,5$ ano.

Resolução:

O valor $h = 0,5$ já foi definido no problema, assim x_i:

$x_0 = a = 3$; $x_1 = x_0 + 0,5 = 3,5$; $x_2 = x_1 + 0,5 = 4$ e $x_3 = x_n = b = 4,5$

Como $f(x) = 200 + e^{0,6x}$ é uma função de taxa de crescimento populacional e desejamos conhecer o crescimento populacional, então devemos calcular $\int_{3}^{4,5} f(x) dx = \int_{3}^{4,5} \left(200 + e^{0,6x}\right) dx$.

Conhecendo $f(x)$, calculamos $f(x_i)$:

i	x_i	$f(x_i)$
0	3	206,05
1	3,5	208,17
2	4	211,02
3	4,5	214,88

Agora vamos calcular o polinômio interpolador de Lagrange, estudado na seção 3.2.

$$f\left(x_0\right)L_0\left(x\right)=206,05\frac{\left(x-3,5\right)\left(x-4\right)\left(x-4,5\right)}{\left(3-3,5\right)\left(3-4\right)\left(3-4,5\right)}$$

$$f\left(x_1\right)L_1\left(x\right)=208,17\frac{\left(x-3\right)\left(x-4\right)\left(x-4,5\right)}{\left(3,5-3\right)\left(3,5-4\right)\left(3,5-4,5\right)}$$

$$f\left(x_2\right)L_2\left(x\right)=211,02\frac{\left(x-3\right)\left(x-3,5\right)\left(x-4,5\right)}{\left(4-3\right)\left(4-3,5\right)\left(4-4,5\right)}$$

$$f\left(x_3\right)L_3\left(x\right)=214,88\frac{\left(x-3\right)\left(x-3,5\right)\left(x-4\right)}{\left(4,5-3\right)\left(4,5-3,5\right)\left(4,5-4\right)}$$

$\boldsymbol{f\left(x_n\right)L_n\left(x\right)}$	$\boldsymbol{x^3}$	$\boldsymbol{x^2}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{f\left(x_0\right)L_0\left(x\right)}$	-275,33	+3303,96	-13147,01	+17345,79
$\boldsymbol{f\left(x_1\right)L_1\left(x\right)}$	+832,68	-9575,82	+36221,58	-44964,72
$\boldsymbol{f\left(x_2\right)L_2\left(x\right)}$	-844,08	+9284,88	-33552,18	+39882,78
$\boldsymbol{f\left(x_3\right)L_3\left(x\right)}$	+286,51	-3008,36	+10457,62	-12033,42
$\sum \boldsymbol{f\left(x_n\right)L_n\left(x\right)}$	-0,22	+4,66	-19,99	+230,43

$\boldsymbol{p\left(x\right)}=-0,22\boldsymbol{x}^3+4,66\boldsymbol{x}^2-19,99\boldsymbol{x}+230,43 \Rightarrow$ Polinômio Interpolador de Lagrange.

Obtido o polinômio interpolador de Lagrange $p\left(x\right)$ podemos realizar a integração.

$$\int_3^{4,5}\left(200+e^{0,6x}\right)dx \cong \int_3^{4,5}p\left(x\right)dx$$

$$\int_3^{4,5}\left(200+e^{0,6x}\right)dx \cong \int_3^{4,5}\left(-0,22x^3+4,66x^2-19,99x+230,43\right)dx=$$

$$\left(-0,06x^{4}+1,55x^{3}-10x^{2}+230,43x\right)\Big|_{3}^{4,5}=951,08-638,28=312,80$$

$$\therefore \int_{3}^{4,5}\left(200+e^{0,6x}\right)dx \cong 312,80 \ \textit{mil habitantes}$$

Conclui-se que a variação populacional, entre 3 e 4,5 anos, será de aproximadamente 312,80 mil habitantes.

Atenção!

Para que você tenha um embasamento maior acesse: <ttp://www.icmc.usp.br/~marialuisa/cursos201002/integracao_numerica.pdf>. Acesso em: 12 set. 2015.

Avançando na prática

<table>
<tr><th colspan="2">Pratique mais!</th></tr>
<tr><td colspan="2">Instrução
Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fórmula de Newton-Cotes</td></tr>
<tr><td>1. Competência de fundamentos de área</td><td>Conhecer o Cálculo Numérico</td></tr>
<tr><td>2. Objetivos de aprendizagem</td><td>Resolver problemas de integração fazendo uso de técnicas numéricas</td></tr>
<tr><td>3. Conteúdos relacionados</td><td>Integração Numérica</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>4. Descrição da SP</td>
<td>

Uma cidade apresenta uma taxa de crescimento de empregos $f(x)[mil \ \textbf{empregos} \ /ano]$ em função do tempo $x[ano]$:

$$f(x) = 0{,}1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}} + 5x\right)$$

Calcule o número de empregos criados entre 3 e 5 anos, para isso faça uso da integração pela fórmula de Newton-Cotes, onde o tempo x varia de 1 em 1 ano, ou seja, $h = 1ano$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Resolução da SP</td>
<td>

Veja que já foi definido $h = 1$, assim x_i:

$x_0 = a = 3$; $x_1 = x_0 + 1 = 4$ e $x_2 = x_n = b = 5$

Como $f(x) = 0{,}1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}} + 5x\right)$ é uma função de taxa de crescimento de empregos e desejamos conhecer o número de empregos criados entre 3 e 5 anos, então devemos calcular $\int_3^5 f(x)\,dx = \int_3^5 \left[0{,}1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}} + 5x\right)\right]dx$

Conhecendo $f(x)$, calculamos $f(x_i)$:

<table>
<tr><th>i</th><th>x_i</th><th>$f(x_i)$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>3</td><td>1,94</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>2,26</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td><td>2,64</td></tr>
</table>

Agora vamos calcular o polinômio interpolador de Lagrange, estudado na seção 3.2.

$$f(x_0)L_0(x) = 1{,}94\frac{(x-4)(x-5)}{(3-4)(3-5)}$$

$$f(x_1)L_1(x) = 2{,}26\frac{(x-3)(x-5)}{(4-3)(4-5)}$$

</td>
</tr>
</table>

$$f(x_2)L_2(x) = 2,64\frac{(x-3)(x-4)}{(5-3)(5-4)}$$

$\boldsymbol{f(x_n)L_n(x)}$	$\boldsymbol{x^2}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{f(x_0)L_0(x)}$	+0,97	-8,73	+19,40
$\boldsymbol{f(x_1)L_1(x)}$	-2,26	+18,08	-33,90
$\boldsymbol{f(x_2)L_2(x)}$	+1,32	-9,24	+15,84
$\boldsymbol{\sum f(x_n)L_n(x)}$	+0,03	+0,11	+1,34

$\boldsymbol{p(x)} = 0,03\boldsymbol{x}^2 + 0,11\boldsymbol{x} + 1,34 \Rightarrow$ Polinômio Interpolador de Lagrange.

Obtido o polinômio interpolador de Lagrange $p(x)$, podemos realizar a integração.

$$\int_3^5 \left[0,1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}} + 5x\right)\right]dx \cong \int_3^5 p(x)\,dx$$

$$\int_3^5 \left[0,1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}} + 5x\right)\right]dx \cong \int_3^5 \left(0,03x^2 + 0,11x + 1,34\right)dx =$$

$$\left(0,01x^3 + 0,06x^2 + 1,34x\right)\Big|_3^5 = 9,45 - 4,83 = 4,62$$

$$\therefore \int_3^5 \left[0,1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}} + 5x\right)\right]\boldsymbol{dx} \cong 4,62 \; \boldsymbol{mil\ empregos}$$

Portanto, entre 3 e 5 anos serão criados 4,62 mil empregos.

Lembre-se

Reforce o seu conhecimento acessando o *link* a seguir:

<http://ssdi.di.fct.unl.pt/comp/1112/aulas/teoricas/aulaT11.pdf>. Acesso em: 12 set. 2015.

Faça você mesmo

Calcule $\int_0^1 \left(\frac{x^2+3x}{\mathrm{x}+1} \right) dx$ fazendo uso da integração pela fórmula de Newton-Cotes para $h = 0,5$.

Faça valer a pena

1. Calcule o valor aproximado da $\int_1^{1,75} \left(\frac{x^2+3x}{\mathrm{x}^2+1} \right) dx$ fazendo uso da integração pela fórmula de Newton-Cotes com $n = 3$:

a) 4,0.

b) 6,7.

c) 0,2.

d) 1,8.

e) 5,1.

2. Calcule o valor aproximado da $\int_{1,4}^{1,8} \left(\frac{\sqrt{x}+4x}{\mathrm{x}^2} \right) dx$ fazendo uso da integração pela fórmula de Newton-Cotes com $n = 2$:

a) 3,1.

b) 1,2.

c) 4,2.

d) 3,8.

e) 0,1.

3. Calcule o valor aproximado da $\int_{2,2}^{2,8}\left(\frac{\sqrt{x}+ln\left(4x\right)}{\mathrm{x}}\right)dx$ fazendo uso da integração pela fórmula de Newton-Cotes com $n=2$:

a) 1,1.

b) 2,5.

c) 3,2.

d) 0,8.

e) 4,7.

4. Calcule o valor aproximado da $\int_{4}^{5,5}\left(\frac{e^{x}}{\ln\left(10x\right)}\right)dx$ fazendo uso da integração pela fórmula de Newton-Cotes com $h=0,5$:

a) 48,5.

b) 180,2.

c) 84,0.

d) - 48,5.

e) - 15,2.

5. Calcule o valor aproximado da $\int_{6}^{7}\left(\frac{5}{\mathrm{x}^{2}}-2x\right)dx$ fazendo uso da integração pela fórmula de Newton-Cotes com $h=0,5$:

a) - 15,0.

b) - 25,7.

c) - 12,9.

d) + 9,2.

e) + 8,7.

6. Calcule o valor aproximado da $\int_{0,5}^{1,3}\left(\frac{10}{\mathrm{x}^{2}}-\frac{x}{0,5e^{x}}\right)dx$ fazendo uso da integração pela fórmula de Newton-Cotes com $h = 0,4$:

7. Calcule o valor aproximado da $\int_5^7 \left(\frac{x^2 + 3x - 5}{x + 4} \right)^{-1} dx$ fazendo uso da integração pela fórmula de Newton-Cotes com $n = 2$:

Seção 4.2

Regra dos Trapézios

Diálogo aberto

Caro aluno, nessa seção trataremos da Integração Numérica fazendo uso da Regra dos Trapézios e para isso desenvolveremos a resolução do problema do crescimento populacional.

A Regra dos Trapézios é uma técnica de Integração Numérica que permite obter o valor aproximado da integral de uma função $f(x)$, $\int_a^b f(x)dx$, como visto na seção 4.1, também se aplica quando $f(x)$ é uma função muito complexa e se torna muito trabalhosa a integração pelas técnicas do Cálculo Diferencial e Integral.

Para compreender melhor, vamos retomar o problema proposto no início dessa unidade: uma cidade apresenta uma taxa de crescimento populacional $f(x)[mil\ habitantes / ano]$ em função do tempo $x[ano]$:

$$f(x) = 200 + e^{0,6x}$$

A empresa Magazine Sul tem a intenção de implantar filiais nessa cidade e necessita conhecer qual será o crescimento populacional entre 3 e 4,5 anos. Para isso ela fez uso da integração pela Regra dos Trapézios.

Coloque-se no lugar do lojista Magazine Sul: o que você precisa saber para resolver esse problema usando cálculo numérico e, mais especificamente, da Integração pela Regra dos Trapézios?

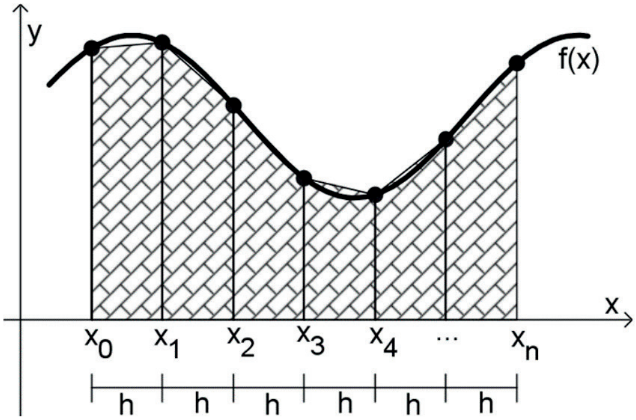
Ao final dessa seção esperamos que você conclua que para resolver o problema teremos de conhecer aspectos teóricos relacionados à Integração pela Regra dos Trapézios.

A seguir veremos a teoria que nos ajudará a entender a técnica comentada.

Não pode faltar

A integração pela Regra dos Trapézios consiste em subdividir a área de integração, $\int_a^b f(x)\,dx$, em alguns trapézios, conforme Figura 4.1, e calcular a somatória dessas áreas. Esse processo permite obter o valor aproximado da $\int_a^b f(x)\,dx$.

Figura 4.1 | Interpretação gráfica da Regra dos Trapézios



Fonte: O autor (2015).

Utilizando essa estratégia, o cálculo da integral fica definido como a seguir:

n = número de trapézios que serão utilizados no cálculo de integração

h = altura de cada trapézio

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{b-a}{n}$$

Onde: $x_0 = a$; $x_1 = x_0 + h$; $x_2 = x_1 + h$; $\cdots$; $x_n = x_{n-1} + h = b$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong 0,5h\left\{f(x_0) + 2\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})\right] + f(x_n)\right\}$$

$$\int_a^b f\left(x\right)dx \cong \left\{0,5\left[f\left(x_0\right)+f\left(x_n\right)\right]+f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)+\cdots+f\left(x_{n-1}\right)\right\}h$$

Se classificarmos:

Externos: $f\left(x_0\right)$ e $f\left(x_n\right)$

Internos: $f\left(x_1\right)$, $f\left(x_2\right)$, $f\left(x_3\right)$, $\cdots$, $f\left(x_{n-1}\right)$

Podemos escrever a integral como a seguir:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx \cong \left(0,5\sum Externos+\sum Internos\right)h$$

Assimile

Pela Regra dos Trapézios, temos:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx \cong \left\{0,5\left[f\left(x_0\right)+f\left(x_n\right)\right]+f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)+\cdots+f\left(x_{n-1}\right)\right\}h$$

Pesquise mais

Complemente o estudo teórico da Regra dos Trapézios com a leitura do material disponível no *link* a seguir:

<www.inf.ufpr.br/silvia/numerico/VI1.pdf>. Acesso em: 17 set. 2015.

Tendo visto os aspectos teóricos da Regra dos Trapézios, acompanhe o exemplo a seguir para fixar melhor os conceitos.

Exemplificando

Calcule $\int_1^3 \frac{100}{x^2+5}dx$ fazendo uso da integração pela Regra dos Trapézios para $n=5$.

Resolução:

Definindo $h=\frac{b-a}{n}$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{5}=0,4$$

Assim:

$$x_0=a=1;$$

$$x_1=x_0+h=1+0,4=1,4$$

$$x_2=x_1+h=1,4+0,4=1,8$$

$$x_3=x_2+h=1,8+0,4=2,2$$

$$x_4=x_3+h=2,2+0,4=2,6$$

$$x_n=x_5=x_{5-1}+h=2,6+0,4=3=b$$

Se desejamos $\int_1^3 \frac{100}{x^2+5}dx$, então $f(x)=\frac{100}{x^2+5}$

Conhecendo $f(x)$, calculamos $f(x_i)$:

x_i	$f(x_i)$
1	16,67
1,4	14,37
1,8	12,14
2,2	10,16
2,6	8,5
3	7,14

Seguindo a formulação:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \left\{0,5\left[f(x_0)+f(x_n)\right]+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_{n-1})\right\}h$$

Realizaremos a integração:

$$\int_1^3 \frac{100}{x^2+5}\,dx \cong \left[0,5\left(16,67+7,14\right)+14,37+12,14+10,16+8,5\right]0,4$$

$$\therefore \int_1^3 \frac{100}{\boldsymbol{x}^2+5}\,\boldsymbol{dx} \cong 22,83$$

Veja uma forma mais prática de efetuar os cálculos:

	x_i	$f(x_i)$	Externos	Internos
Externo	1	16,67	16,67	
Interno	1,4	14,37		14,37
Interno	1,8	12,14		12,14
Interno	2,2	10,16		10,16
Interno	2,6	8,5		8,5
Externo	3	7,14	7,14	
$\sum$			**23,81**	**45,17**
			$\sum$ *Externos*	$\sum$ *Internos*

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \left(0,5\sum Externos+\sum Internos\right)h$$

$$\int_1^3 \frac{100}{x^2+5}\,dx \cong \left(0,5 \cdot 23,81+45,17\right)0,4$$

$$\therefore \int_1^3 \frac{100}{\boldsymbol{x}^2+5}\,\boldsymbol{dx} \cong 22,83$$

Caro aluno, agora o convidamos a resolver a atividade a seguir; veja se entendeu o que lhe foi apresentado.

Faça você mesmo

Calcule $\int_{2}^{3} \frac{2xe^{x}}{\ln(3x)} dx$ fazendo uso da integração pela Regra dos Trapézios para $n = 4$.

Sem medo de errar

Vamos relembrar o problema proposto no início dessa seção: uma cidade apresenta uma taxa de crescimento populacional $f(x)[mil\ habitantes / ano]$ em função do tempo $x[ano]$:

$$f(x) = 200 + e^{0,6x}$$

A empresa Magazine Sul, com a intenção de implantar filiais nessa cidade, necessita conhecer qual será o crescimento populacional entre 3 e 4,5 anos. Para isso o lojista Magazine Sul fez uso da integração pela Regra dos Trapézios, onde tempo $\boldsymbol{x}$ varia de 0,5 em 0,5 ano, ou seja, $h = 0,5\,ano$.

Resolução:

$h = 0,5$ (já foi definido no problema)

Assim, calculamos os x_i:

$x_0 = a = 3$; $x_1 = x_0 + 0,5 = 3,5$; $x_2 = x_1 + 0,5 = 4$ e $x_3 = x_n = b = 4,5$

Como $f(x) = 200 + e^{0,6x}$ é uma função de taxa de crescimento populacional e desejamos conhecer a variação do crescimento populacional, então devemos calcular $\int_{3}^{4,5} f(x)\,dx = \int_{3}^{4,5} \left(200 + e^{0,6x}\right) dx$.

Conhecendo $f(x)$, calculamos $f(x_i)$:

i	x_i	$f(x_i)$
0	3	206,05
1	3,5	208,17
2	4	211,02
3	4,5	214,88

Resolvendo pela forma mais prática, temos:

	x_i	$f(x_i)$	Externos	Internos
Externo	3	206,05	206,05	
Interno	3,5	208,17		208,17
Interno	4	211,02		211,02
Externo	4,5	214,88	214,88	
$\sum$			**420,93**	**419,19**
			$\sum$ *Externos*	$\sum$ *Internos*

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \left(0,5\sum Externos + \sum Internos\right)h$$

$$\int_3^{4,5} \left(200 + e^{0,6x}\right)dx \cong \left(0,5 \cdot 420,93 + 419,19\right)0,5$$

$$\therefore \int_3^{4,5} \left(200 + e^{0,6x}\right)dx \cong 314,83 \textbf{ \textit{mil habitantes}}$$

Concluímos, deste modo, que a variação populacional, entre 3 e 4,5 anos, será de aproximadamente 314,83 mil habitantes.

Atenção!

Para que você tenha um maior embasamento, acesse:

<www.dsc.ufcg.edu.br/~cnum/modulos/Modulo7/integracao.ppt>. Acesso em: 17 set. 2015.

Lembre-se

Pela Regra dos Trapézios, temos:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \{0,5[f(x_0)+f(x_n)]+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_{n-1})\}h$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \left(0,5\sum Externos+\sum Internos\right)h$$

Avançando na prática

Pratique mais!	
Instrução Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.	
Regra dos Trapézios	
1. Competência de fundamentos de área	Conhecer o Cálculo Numérico
2. Objetivos de aprendizagem	Resolver problemas de integração fazendo uso da Regra dos Trapézios
3. Conteúdos relacionados	Integração Numérica

<table>
<tr>
<td>4. Descrição da situação-problema</td>
<td>
Uma cidade apresenta uma taxa de crescimento de empregos $f(x)[mil\,empregos/ano]$ em função do tempo $x[ano]$:
$$f(x)=0,1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}}+5x\right)$$
Calcule o número de empregos criados entre 3 e 5 anos e, para isso, faça uso da integração pela Regra dos Trapézios, onde o tempo x varia de 1 em 1 ano, ou seja, $h=1ano$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Resolução da situação-problema</td>
<td>
Veja que já foi definido $h=1$, assim calculamos os x_i:
$$x_0=a=3;\ x_1=x_0+1=4 \text{ e } x_2=x_n=b=5$$
Como $f(x)=0,1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}}+5x\right)$ é uma função de taxa de crescimento de empregos e desejamos conhecer o número de empregos criados entre 3 e 5 anos, então devemos calcular $\int_3^5 f(x)\,dx=\int_3^5\left[0,1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}}+5x\right)\right]dx$.
Conhecendo $f(x)$, calculamos $f(x_i)$:
<table>
<tr><th>i</th><th>x_i</th><th>$f(x_i)$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>3</td><td>1,94</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>2,26</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td><td>2,64</td></tr>
</table>
Resolvendo pela forma mais prática, temos:
<table>
<tr><th></th><th>i</th><th>x_i</th><th>$f(x_i)$</th><th>Externos</th><th>Internos</th></tr>
<tr><td>Ext.</td><td>0</td><td>3</td><td>1,94</td><td>1,94</td><td></td></tr>
<tr><td>Int.</td><td>1</td><td>4</td><td>2,26</td><td></td><td>2,26</td></tr>
<tr><td>Ext.</td><td>2</td><td>5</td><td>2,64</td><td>2,64</td><td></td></tr>
<tr><td>Σ</td><td></td><td></td><td></td><td>4,58</td><td>2,26</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>$\sum Externos$</td><td>$\sum Internos$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

	$\int_a^b f(x)\,dx \cong \left(0,5\sum Externos+\sum Internos\right)h$ $\int_3^5\left[0,1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}}+5x\right)\right]dx \cong \left(0,5\ .\ 4,58+2,26\right)1$ $\therefore \int_3^5\left[0,1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}}+5x\right)\right]dx \cong 4,55\ \textbf{\textit{mil empregos}}$ Portanto, entre 3 e 5 anos, serão criados 4,55 mil empregos.

Lembre-se

Reforce o seu conhecimento acessando o *link* a seguir:

<https://www.youtube.com/watch?v=TXdTEo8ogyE> Acesso em: 17 set. 2015.

Faça você mesmo

Calcule $\int_0^1\left(\frac{x^2+3x}{\mathrm{x}+1}\right)dx$ fazendo uso da integração pela Regra dos Trapézios para $h=0,25$.

Faça valer a pena

1. Calcule o valor aproximado da $\int_{1}^{1,75}\left(\frac{x^2+3x}{\mathrm{x}^2+1}\right)dx$ fazendo uso da integração pela Regra dos Trapézios com $n=5$. Depois assinale a alternativa que contém o valor mais próximo:

a) 3,8.

b) 1,6.

c) 2,9.

d) 0,8.

e) 5,1.

2. Calcule o valor aproximado da $\int_{1,4}^{1,8}\left(\frac{\sqrt{x}+4x}{\mathrm{x}^2}\right)dx$ fazendo uso da integração pela Regra dos Trapézios com $n=5$. Depois assinale a alternativa que contém o valor mais próximo:

a) 4,5.

b) 2,1.

c) 3,2.

d) 1,2.

e) 0,3.

3. Calcule o valor aproximado da $\int_{2,2}^{2,8}\left(\frac{\sqrt{x}+ln(4x)}{\mathrm{x}}\right)dx$ fazendo uso da integração pela Regra dos Trapézios com $n=6$. Depois assinale a alternativa que contém o valor mais próximo:

a) 5,0.

b) 3,2.

c) 0,9.

d) 1,8.

e) 4,1.

4. Calcule o valor aproximado da $\int_{4}^{5,5}\left(\frac{e^{x}}{\ln(10x)}\right)dx$ fazendo uso da integração pela Regra dos Trapézios com $h=0,3$. Depois assinale a alternativa que contém o valor mais próximo:

a) 11,2.

b) 18,2.

c) 49,2.

d) 40,5.

e) 19,2.

5. Calcule o valor aproximado da $\int_{6}^{7}\left(\frac{5}{\mathrm{x}^{2}}-2x\right)dx$ fazendo uso da integração pela Regra dos Trapézios com $h=0,2$. Depois assinale a alternativa que contém o valor mais próximo:

a) - 15,9.

b) + 29,7.

c) + 12,9.

d) + 1,2.

e) - 12,9.

6. Calcule o valor aproximado da $\int_{0,5}^{1,3}\left(\frac{10}{\mathrm{x}^{2}}-\frac{x}{0,5e^{x}}\right)dx$ fazendo uso da integração pela Regra dos Trapézios com $h=0,2$:

7. Calcule o valor aproximado da $\int_{5}^{7}\left(\frac{x^{2}+3x-5}{x+4}\right)^{-1}dx$ fazendo uso da integração pela Regra dos Trapézios com $n=5$:

Seção 4.3

Regra de Simpson

Diálogo aberto

Caro aluno, nessa seção trataremos da Integração Numérica fazendo uso da Regra de Simpson e para isso desenvolveremos a resolução do problema do crescimento populacional.

Assim como os métodos apresentados nas seções 3.1 e 3.2, a Regra de Simpson é uma técnica de Integração Numérica que permite obter o valor aproximado da integral de uma função $f(x)$, $\int_a^b f(x)dx$, geralmente aplicada quando $f(x)$ é uma função muito complexa e se torna muito trabalhosa a integração utilizando os métodos de Cálculo Diferencial e Integral, ou a função é desconhecida.

Para compreender melhor, vamos retomar o problema proposto no início dessa unidade: uma cidade apresenta uma taxa de crescimento populacional $f(x)[mil\ habitantes / ano]$ em função do tempo $x[ano]$:

$$f(x) = 200 + e^{0,6x}$$

A empresa KLM Veículos tem a intenção de implantar filiais nessa cidade e necessita conhecer qual será o crescimento populacional entre 3 e 4,5 anos. Para isso essa empresa fez uso da integração pela Regra de Simpson.

Coloque-se no lugar da KLM Veículos: o que você precisa saber para resolver esse problema usando cálculo numérico e, mais especificamente, a Regra de Integração de Simpson?

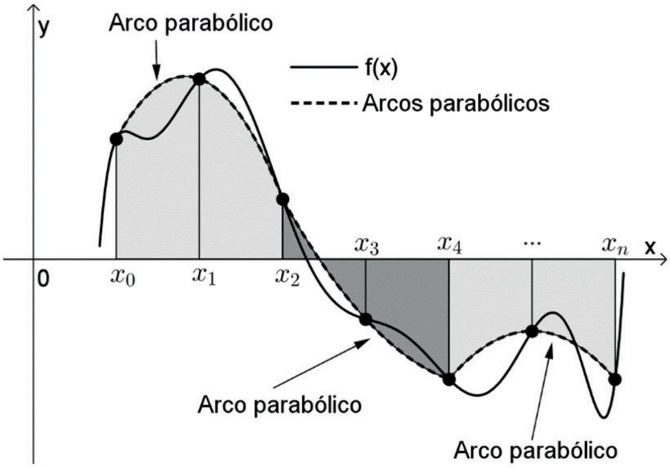
Ao final dessa seção esperamos que você conclua que para resolver o problema teremos de conhecer aspectos teóricos relacionados à Integração pela Regra de Simpson.

A seguir veremos a teoria que nos ajudará a entender a técnica comentada.

Não pode faltar

Você poderá encontrar em outras bibliografias a Regra de Integração de Simpson com as seguintes nomenclaturas: Regra de 1/3 de Simpson; Regra de 1/3 de Simpson Repetida. Essa regra utiliza integração por aproximações de pequenos trechos de curvas por meio de pequenas parábolas conforme Figura 4.2.

Figura 4.2 | Integração pela Regra de Simpson



Fonte: O autor (2015).

O cálculo da integral $\int_a^b f(x)dx$ é definido como a seguir:

h = distância entre x_{i-1} e x_i, para $i=1$, 2, ..., n, onde:

$$h=\frac{x_n-x_0}{n}=\frac{b-a}{n}$$

Logo: $x_0=a$; $x_1=x_0+h$; $x_2=x_1+h$; $\cdots$; $x_n=x_{n-1}+h=b$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left\{f(x_0)+f(x_n)+4\left[f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{n-1})\right]+2\left[f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{n-2})\right]\right\}$$

Simplificando a escrita, temos:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[\sum f\left(x_{Extremos}\right)+4\sum f\left(x_{i=\acute{I}mpar}\right)+2\sum f\left(x_{i=Par}\right)\right]$$

Assimile

Pela Regra de Simpson, temos:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left\{f(x_0)+f(x_n)+4\left[f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{n-1})\right]+2\left[f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{n-2})\right]\right\}$$

Pesquise mais

Complemente seus estudos acessando o *link* a seguir:

<http://www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti/8CN_integracao.pdf>. Acesso em: 17 set. 2015.

Exemplificando

Calcule $\int_1^3 \frac{100}{x^2+5}dx$ fazendo uso da integração pela Regra de Integração de Simpson para $n=5$.

Resolução:

Definindo $h=\frac{b-a}{n}$, temos:

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{5}=0,4$$

Assim:

$$x_0 = a = 1;$$

$$x_1 = x_0 + h = 1 + 0,4 = 1,4;$$

$$x_2 = x_1 + h = 1,4 + 0,4 = 1,8;$$

$$x_3 = x_2 + h = 1,8 + 0,4 = 2,2;$$

$$x_4 = x_3 + h = 2,2 + 0,4 = 2,6;$$

$$x_n = x_5 = x_{5-1} + h = 2,6 + 0,4 = 3 = b.$$

Se desejamos $\int_1^3 \frac{100}{x^2+5}dx$, então $f(x) = \frac{100}{x^2+5}$

Conhecendo $f(x)$, calculamos $f(x_i)$:

	i	x_i	$f(x_i)$
Extremo	0	1	16,67
Ímpar	1	1,4	14,37
Par	2	1,8	12,14
Ímpar	3	2,2	10,16
Par	4	2,6	8,5
Extremo	5	3	7,14

Seguindo a formulação:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left\{f(x_0) + f(x_n) + 4\left[f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})\right] + 2\left[f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{n-2})\right]\right\}$$

$$\int_1^3 \frac{100}{x^2+5}dx \cong \frac{0,4}{3}\left[16,67 + 7,14 + 4(14,37 + 10,16) + 2(12,14 + 8,5)\right]$$

$$\int_1^3 \frac{100}{\boldsymbol{x}^2+5}\boldsymbol{dx} \cong 21,76$$

Veja uma forma mais prática de efetuar os cálculos:

	i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_{Extremos})$	$f\left(x_{i=Ímpar}\right)$	$f(x_{i=Par})$
Extremo	0	1	16,67	16,67		
Ímpar	1	1,4	14,37		14,37	
Par	2	1,8	12,14			12,14
Ímpar	3	2,2	10,16		10,16	
Par	4	2,6	8,5			8,5
Extremo	5	3	7,14	7,14		
Σ				23,81	24,53	20,64
				$\Sigma f(x_{Extremos})$	$\Sigma f\left(x_{i=Ímpar}\right)$	$\Sigma f(x_{i=Par})$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[\Sigma f(x_{Extremos}) + 4\Sigma f\left(x_{i=Ímpar}\right) + 2\Sigma f(x_{i=Par})\right]$$

$$\int_1^3 \frac{100}{x^2+5}\,dx \cong \frac{0,4}{3}\left(23,81 + 4\cdot 24,53 + 2\cdot 20,64\right)$$

$$\int_1^3 \frac{100}{\boldsymbol{x}^2+5}\,\boldsymbol{dx} \cong 21,76$$

Você está sendo convidado a resolver a atividade a seguir; veja se entendeu o que lhe foi apresentado.

Faça você mesmo

Calcule $\int_2^3 \frac{2xe^x}{\ln(3x)}dx$ utilizando a Regra de Simpson para $n = 4$.

Sem medo de errar

Uma cidade apresenta uma taxa de crescimento populacional $f\left(x\right)\left[mil\ habitantes\,/\,ano\right]$ em função do tempo $x\left[ano\right]$:

$$f\left(x\right)=200+e^{0,6x}$$

A empresa KLM Veículos, com a intenção de implantar filiais nessa cidade, necessita conhecer qual será o crescimento populacional entre 3 e 4,5 anos. Para isso o lojista KLM Veículos fez uso da integração pela Regra de Integração de Simpson, onde tempo x varia de 0,5 em 0,5 ano, ou seja, $h=0,5\,ano$.

Resolução:

$h=0,5$ (já foi definido no problema)

Assim, calculamos os x_i:

$x_0=a=3$; $x_1=x_0+0,5=3,5$; $x_2=x_1+0,5=4$ e $x_3=x_n=b=4,5$

Como $f\left(x\right)=200+e^{0,6x}$ é uma função de taxa de crescimento populacional e desejamos conhecer a variação do crescimento populacional, então devemos calcular $\int_3^{4,5} f\left(x\right)dx=\int_3^{4,5}\left(200+e^{0,6x}\right)dx$.

Conhecendo $f\left(x\right)$, calculamos $f\left(x_i\right)$:

	i	x_i	$f\left(x_i\right)$	$f\left(x_{Extremos}\right)$	$f\left(x_{i=Ímpar}\right)$	$f\left(x_{i=Par}\right)$
Extremo	0	3	206,05	206,05		
Ímpar	1	3,5	208,17		208,17	
Par	2	4	211,02			211,02
Extremo	3	4,5	214,88	214,88		
$\sum$				420,93	208,17	211,02
				$\sum f\left(x_{Extremos}\right)$	$\sum f\left(x_{i=Ímpar}\right)$	$\sum f\left(x_{i=Par}\right)$

Resolvendo pela forma mais prática:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[\sum f\left(x_{Extremos}\right) + 4\sum f\left(x_{i=Ímpar}\right) + 2\sum f\left(x_{i=Par}\right)\right]$$

$$\int_3^{4,5}\left(200 + e^{0,6x}\right)dx \cong \frac{0,5}{3}\left(420,93 + 4 \cdot 208,17 + 2 \cdot 211,02\right)$$

$$\int_3^{4,5}\left(200 + e^{0,6x}\right)dx \cong 279,28 \textbf{\textit{ mil habitantes}}$$

Concluímos que a variação populacional, entre 3 e 4,5 anos, será de aproximadamente 279,28 mil habitantes.

Atenção!

Para que você tenha um maior embasamento, acesse:

<http://www.facom.ufms.br/~montera/integracao_parte2.pdf>. Acesso em: 18 set. 2015.

Lembre-se

Pela Regra de Integração de Simpson, temos:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left\{f(x_0) + f(x_n) + 4\left[f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})\right] + 2\left[f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{n-2})\right]\right\}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[\sum f\left(x_{Extremos}\right) + 4\sum f\left(x_{i=Ímpar}\right) + 2\sum f\left(x_{i=Par}\right)\right]$$

Avançando na prática

<table>
<tr><th colspan="2">Pratique mais!</th></tr>
<tr><td colspan="2">Instrução
Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Regra de Simpson</td></tr>
<tr><td>1. Competência de fundamentos de área</td><td>Conhecer o Cálculo Numérico</td></tr>
<tr><td>2. Objetivos de aprendizagem</td><td>Resolver problemas de integração fazendo uso da Regra de Integração de Simpson</td></tr>
<tr><td>3. Conteúdos relacionados</td><td>Integração Numérica</td></tr>
<tr><td>4. Descrição da situação-problema</td><td>Uma cidade apresenta uma taxa de crescimento de empregos $f(x)[mil\ empregos\ /\ ano]$ em função do tempo $x[ano]$:
$$f(x)=0,1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}}+5x\right)$$
Calcule número de empregos criados entre 3 e 5 anos e, para isso, faça uso da integração pela Regra de Integração de Simpson, onde tempo x varia de 1 em 1 ano, ou seja, $h=1\ ano$.</td></tr>
<tr><td>5. Resolução da situação-problema</td><td>Veja que já foi definido $h=1$, assim calculamos os x_i:
$$x_0=a=3;\ x_1=x_0+1=4 \text{ e } x_2=x_n=b=5$$
Como $f(x)=0,1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}}+5x\right)$ é uma função de taxa de crescimento de empregos e desejamos conhecer o número de empregos criados entre 3 e 5 anos, então devemos calcular $\int_3^5 f(x)\,dx=\int_3^5\left[0,1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}}+5x\right)\right]dx$.
Conhecendo $f(x)$, calculamos $f(x_i)$:
<table>
<tr><th>i</th><th>x_i</th><th>$f(x_i)$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>3</td><td>1,94</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>2,26</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td><td>2,64</td></tr>
</table>

Resolvendo pela forma mais prática, temos:</td></tr>
</table>

	i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_{Extremos})$	$f(x_{i=Ímpar})$
Ext.	0	3	1,94	1,94	
Ímpar	1	4	2,26		2,26
Ext.	2	5	2,64	2,64	
Σ				4,58	2,26
				$\Sigma f(x_{Extremos})$	$\Sigma f(x_{i=Ímpar})$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[\Sigma f(x_{Extremos}) + 4\Sigma f(x_{i=Ímpar}) + 2\Sigma f(x_{i=Par})\right]$$

$$\int_3^5 \left[0{,}1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}} + 5x\right)\right]dx \cong \frac{1}{3}\left(4{,}58 + 4 \cdot 2{,}26 + 2 \cdot 0\right)$$

$$\therefore \int_3^5 \left[0{,}1\left(\frac{x^2+3}{e^{x-2}} + 5x\right)\right]dx \cong 4{,}54 \ \textbf{\textit{mil empregos}}$$

Portanto, entre 3 e 5 anos, serão criados 4,54 mil empregos.

Lembre-se

Reforce o seu conhecimento acessando o *link* a seguir:

<http://www.inf.ufpr.br/silvia/numerico/VI2.pdf>. Acesso em: 18 set. 2015.

Faça você mesmo

Calcule $\int_0^1 \left(\frac{x^2+3x}{\mathrm{x}+1}\right)dx$ fazendo uso da integração pela Regra de Simpson para $h = 0,25$.

Faça valer a pena

1. Calcule o valor aproximado da $\int_{1}^{1,75}\left(\frac{x^2+3x}{x^2+1}\right)dx$ fazendo uso da integração pela Regra de Simpson com $n=5$. Depois assinale a alternativa que contém o valor mais próximo:

a) 3,8.

b) 6,0.

c) 3,9.

d) 0,2.

e) 1,4.

2. Calcule o valor aproximado da $\int_{1,4}^{1,8}\left(\frac{\sqrt{x}+4x}{x^2}\right)dx$ fazendo uso da integração pela Regra de Simpson com $n=5$. Depois assinale a alternativa que contém o valor mais próximo:

a) 1,1.

b) 3,1.

c) 0,2.

d) 4,2.

e) 0,1.

3. Calcule o valor aproximado da $\int_{2,2}^{2,8}\left(\frac{\sqrt{x}+ln(4x)}{x}\right)dx$ fazendo uso da integração pela Regra de Simpson com $n=6$. Depois assinale a alternativa que contém o valor mais próximo:

a) 7,2.

b) 2,2.

c) 3,9.

d) 0,8.

e) 4,1.

4. Calcule o valor aproximado da $\int_{4}^{5,5} \left(\frac{e^x}{\ln(10x)} \right) dx$ fazendo uso da integração pela Regra de Simpson com $h = 0,3$. Depois assinale a alternativa que contém o valor mais próximo:

a) 21,2.

b) 28,1.

c) 39,7.

d) 10,5.

e) 43,6.

5. Calcule o valor aproximado da $\int_{6}^{7} \left(\frac{5}{\mathrm{x}^2} - 2x \right) dx$ fazendo uso da integração pela Regra de Simpson com $h = 0,2$. Depois assinale a alternativa que contém o valor mais próximo:

a) - 51,9.

b) + 92,7.

c) + 12,9.

d) - 12,6.

e) - 21,9.

6. Calcule o valor aproximado da $\int_{0,5}^{1,3} \left(\frac{10}{\mathrm{x}^2} - \frac{x}{0,5e^x} \right) dx$ fazendo uso da integração pela Regra de Simpson com $h = 0,2$:

7. Calcule o valor aproximado da $\int_{5}^{7} \left(\frac{x^2 + 3x - 5}{x + 4} \right)^{-1} dx$ fazendo uso da integração pela Regra de Simpson com $n = 5$:

Seção 4.4

Estudo dos erros na integração numérica

Diálogo aberto

Caro aluno, nessa seção trataremos do Estudo dos Erros na Integração Numérica pela Regra dos Trapézios e pela Regra de Simpson e, para isso, desenvolveremos a resolução do problema do crescimento populacional.

Vimos nas seções 4.1, 4.2 e 4.3 que a Integração Numérica nos fornece um valor aproximado do valor real, cuja obtenção demandaria técnicas do Cálculo Diferencial e Integral. Pelo fato de obtermos uma aproximação, faz-se necessário esse estudo dos erros.

Para compreender melhor, vamos retomar o problema proposto no início dessa unidade: uma cidade apresenta uma taxa de crescimento populacional $f(x)\left[mil\ habitantes / ano\right]$ em função do tempo $x\left[ano\right]$:

$$f(x) = 200 + e^{0,6x}$$

As empresas Magazine Sul e KLM Veículos, com o objetivo de instalarem filiais na cidade, estimaram a partir das informações anteriores a variação de habitantes entre 3 e 4,5 anos, sendo que a primeira utilizou integração numérica pela Regra dos Trapézios e a segunda integração numérica pela Regra de Simpson. A prefeitura local, por sua vez, irá apresentar o Estudo do Erro nas estimativas feitas por essas duas empresas.

Coloque-se no lugar do funcionário da prefeitura designado para realizar esse estudo: o que você precisa saber para resolver esse problema usando cálculo numérico e, mais especificamente, do Estudo do Erro na Integração Numérica pela Regra dos Trapézios e pela Regra de Simpson?

Ao final dessa seção esperamos que você conclua que para resolver o problema teremos de conhecer aspectos teóricos relacionados ao Estudo do Erro e aqueles relativos à Integração Numérica pela Regra dos Trapézios e pela Regra de Simpson.

A seguir veremos a teoria que nos ajudará a entender a técnica comentada.

Não pode faltar

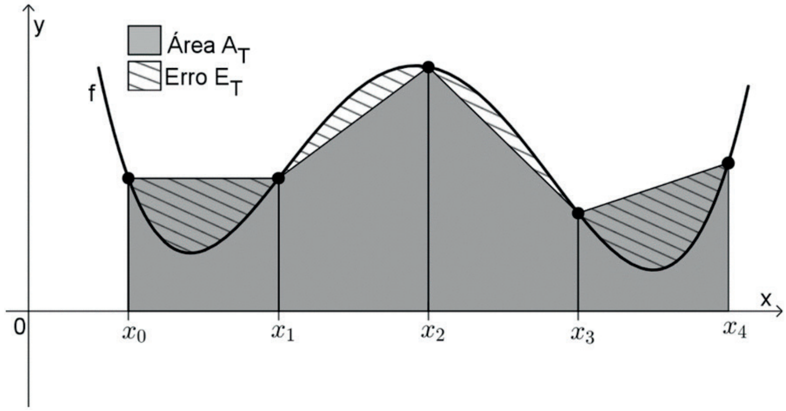
Na área de cálculo numérico, o erro cometido ao aplicar determinada técnica pode ser definido simplificadamente como a diferença entre o valor exato e o valor aproximado. Desse mesmo modo, também definimos o erro na integração numérica, ou seja, a diferença entre o valor exato da integral e o valor obtido por aproximação.

Veja a seguir como realizar uma estimativa do erro cometido ao aproximar a integral de uma função em certo intervalo utilizando a Regra dos Trapézios e a Regra de Simpson.

Estudo do Erro na Integração pela Regra dos Trapézios

Na Figura 4.3 é apresentada uma função $f(x)$ particular e uma aproximação para $\int_a^b f(x)dx$ utilizando a Regra dos Trapézios com $n=4$ e $h=(b-a)/n$, onde $x_0=a$ e $x_4=b$.

Figura 4.3 | Aproximação para $\int_a^b f(x)dx$ pela Regra dos Trapézios



Fonte: O autor (2015).

Observe que a aproximação para a integral é A_T, valor correspondente à área cinza indicada na figura. Veja também que o erro E_T cometido ao utilizar essa técnica está representado pela área hachurada e, além disso, o definimos como a seguir:

$$E_T=\int_a^b f(x)dx-A_T$$

Para qualquer quantidade n de subintervalos em que $[a,b]$ é dividido, a interpretação geométrica do erro é a mesma. Deste modo, para n subintervalos, utilizando técnicas do cálculo diferencial e integral, pode ser demonstrado que uma estimativa para o erro ilustrado anteriormente é dada pela expressão a seguir:

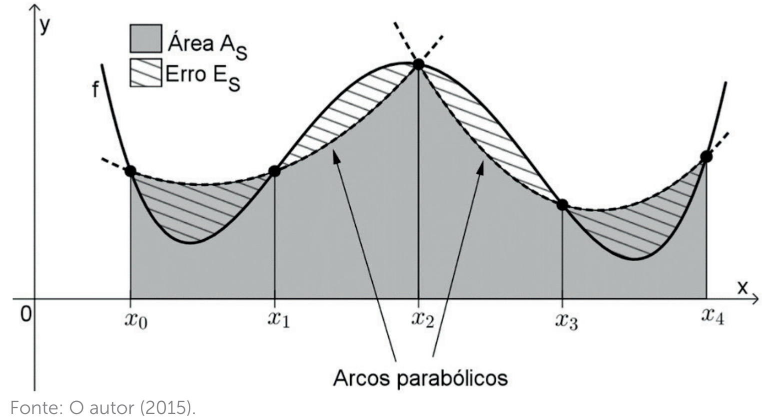
$$\left|E_T\right| \le \frac{h^2}{12}\cdot\left(x_n - x_0\right)\cdot máx\left\{\left|f''\left(x\right)\right|,\, x_0 \le x \le x_n\right\}$$

Onde $h = \left(b-a\right)/n$, $x_0 = a$, $x_n = b$ e $máx\left\{\left|f''\left(x\right)\right|,\, x_0 \le x \le x_n\right\}$ é o máximo valor absoluto da segunda derivada de $f(x)$ calculada para os valores de x envolvidos na integração, ou seja, $x_0 \le x \le x_n\}$ (SPERANDIO; MENDES; SILVA, 2003).

Estudo do Erro na Integração pela Regra de Simpson

Na Figura 4.4 é apresentada uma função $f(x)$ particular e uma aproximação para $\int_a^b f\left(x\right)dx$ utilizando a Regra de Simpson com $n = 4$ e $h = \left(b-a\right)/n$, onde $x_0 = a$ e $x_4 = b$.

Figura 4.4 | Aproximação para $\int_a^b f\left(x\right)dx$ pela Regra de Simpson



Fonte: O autor (2015).

As observações acerca da Figura 4.4 são muito semelhantes às feitas a respeito do erro da integração realizada pela Regra dos Trapézios, mas vale a pena reafirmarmos: a aproximação para a integral é A_S, valor correspondente à área cinza indicada na figura. Veja também que o erro E_S cometido ao utilizar essa técnica está representado pela área hachurada e, além disso, o definimos como a seguir:

$$E_S = \int_a^b f\left(x\right)dx - A_S$$

Para qualquer quantidade n de subintervalos em que $\left[a,b\right]$ é dividido, a interpretação geométrica do erro é a mesma. Deste modo, para n subintervalos, utilizando técnicas do cálculo diferencial e integral, pode ser demonstrado que uma estimativa para o erro ilustrado anteriormente é dada pela expressão a seguir:

$$\left|E_S\right| \le \frac{h^4}{180} \cdot \left(x_n - x_0\right) \cdot máx\left\{\left|f^{IV}\left(x\right)\right|,\ x_0 \le x \le x_n\right\}$$

Onde $h = \left(b-a\right)/n$, $x_0 = a$, $x_n = b$ e $máx\left\{\left|f^{IV}\left(x\right)\right|,\ x_0 \le x \le x_n\right\}$ é o máximo valor absoluto da quarta derivada de $f\left(x\right)$ calculada para os valores de x envolvidos na integração, ou seja, $x_0 \le x \le x_n\}$ (SPERANDIO; MENDES; SILVA, 2003).

Simplificações

Observe que as expressões descritas para a estimativa do erro, tanto para a Regra dos Trapézios quanto para a Regra de Simpson, demandam o conhecimento do máximo valor absoluto de uma derivada de f no intervalo de integração, sendo que no caso da Regra dos Trapézios é a segunda derivada e no caso da Regra de Simpson é a quarta derivada.

Na prática, $máx\left\{\left|f''\left(x\right)\right|, x_0 \le x \le x_n\right\}$ é estimado por $máx\left\{\left|f''\left(x_i\right)\right|,\ i = 0,1,\ldots,n\right\}$ e $máx\left\{\left|f^{IV}\left(x\right)\right|,\ x_0 \le x \le x_n\right\}$ é estimado por $máx\left\{\left|f^{IV}\left(x_i\right)\right|,\ i = 0,1,\ldots,n\right\}$. Calculadas essas estimativas, temos:

$$\left|E_T\right| \cong \frac{h^2}{12} \cdot \left(x_n - x_0\right) \cdot máx\left\{\left|f''\left(x_i\right)\right|,\ i = 0,1,\ldots,n\right\}$$

$$\left|E_S\right| \cong \frac{h^4}{180} \cdot \left(x_n - x_0\right) \cdot máx\left\{\left|f^{IV}\left(x_i\right)\right|,\ i = 0,1,\ldots,n\right\}$$

Assimile

- Estimativa do Erro na Integração pela Regra dos Trapézios:

$$\left|E_T\right| \cong \frac{h^2}{12}\cdot\left(x_n - x_0\right)\cdot máx\left\{\left|f''\left(x_i\right)\right|,\ i = 0,1,\ldots,n\right\}$$

- Estimativa do Erro na Integração pela Regra de Simpson:

$$\left|E_S\right| \cong \frac{h^4}{180}\cdot\left(x_n - x_0\right)\cdot máx\left\{\left|f^{IV}\left(x_i\right)\right|,\ i = 0,1,\ldots,n\right\}$$

Pesquise mais

Complemente seus estudos teóricos acerca dos erros na integração numérica acessando o *link* a seguir:

<http://www.cin.ufpe.br/~if215/slides/2014-1/Aula_22-1_-_Calculo_Numerico_-_Cap_6_-_Integracao_Numerica_-_Erros.pdf>. Acesso em: 20 set. 2015.

Tendo visto alguns aspectos teóricos acerca da estimativa dos erros na integração pela Regra dos Trapézios e pela Regra de Simpson, veja um exemplo para fixar melhor os conceitos.

Exemplificando

Dada $\int_2^4 5\sqrt[3]{x}dx$, calcule o erro se a integração for realizada pela Regra dos Trapézios e pela Regra de Simpson, ambas com $n = 2$.

Resolução:

Definindo $h = \frac{b-a}{n}$, como visto nas seções 4.1, 4.2 e 4.3, temos:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{2} = 1$$

Assim:

$$x_0 = a = 2;$$

$$x_1 = x_0 + h = 2 + 1 = 3;$$

$$x_n = x_2 = x_{2-1} + h = x_1 + h = 3 + 1 = 4 = b.$$

	x_0	x_1	x_2
x	2	3	4

Erro na integração pela Regra dos Trapézios

Como $\int_2^4 5\sqrt[3]{x}dx$ então $f(x) = 5\sqrt[3]{x} = 5x^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}} \qquad f''(x) = -\frac{10}{9}x^{-5/3}$$

	x_0	x_1	x_2
x	2	3	4
$f''(x)$	-0,35	-0,18	-0,11

$$máx\left\{\left|f''(x_i)\right|,\ i = 0,1,\ldots,n\right\} = 0,35$$

$$\left|E_T\right| \cong \frac{h^2}{12} \cdot (x_n - x_0) \cdot máx\left\{\left|f''(x_i)\right|,\ i = 0,1,\ldots,n\right\}$$

$$\left|E_T\right| \cong \frac{1^2}{12} \cdot (4 - 2) \cdot 0,35 = 0,0583$$

Erro na integração pela Regra de Simpson

Como $\int_2^4 5\sqrt[3]{x}dx$ então $f(x) = 5\sqrt[3]{x} = 5x^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = -\frac{10}{9}x^{-5/3} \qquad f'''(x) = \frac{50}{27}x^{-8/3}$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{400}{81}x^{-11/3}$$

	x_0	x_1	x_2
x	2	3	4
$f^{IV}(x)$	-0,39	-0,09	-0,03

$$máx\left\{\left|f^{IV}(x_i)\right|,\ i=0,1,\ldots,n\right\}=0,39$$

$$\left|E_S\right|\cong\frac{h^4}{180}\cdot\left(x_n-x_0\right)\cdot máx\left\{\left|f^{IV}(x_i)\right|,\ i=0,1,\ldots,n\right\}$$

$$\left|E_S\right|\cong\frac{1^4}{180}\cdot\left(4-2\right)\cdot 0,39=0,0043$$

Faça você mesmo

Dada $\int_3^5 \ln\left(1+2x\right)dx$, calcule o erro se a integração for realizada pela Regra dos Trapézios e pela Regra de Simpson, ambas com $h=0,5$.

Sem medo de errar

Vamos relembrar o problema proposto no início da seção: uma cidade apresenta uma taxa de crescimento populacional $f\left(x\right)\left[mil\ habitantes/ano\right]$ em função do tempo $x\left[ano\right]$:

$$f\left(x\right)=200+e^{0,6x}$$

As empresas Magazine Sul e KLM Veículos, com o objetivo de instalarem filiais na cidade, estimaram a partir das informações anteriores a variação de habitantes entre 3 e 4,5 anos, sendo que a primeira utilizou integração numérica pela Regra dos Trapézios e a segunda integração numérica pela Regra de Simpson. A prefeitura local, por sua vez, irá apresentar o Estudo do Erro nas estimativas feitas por essas duas empresas.

Coloque-se no lugar do funcionário da prefeitura designado para a tarefa e faça a estimativa dos erros.

Resolução:

$h = 0,5$ (já foi definido no problema)

Assim, calculamos os x_i :

$x_0 = a = 3$; $x_1 = x_0 + 0,5 = 3,5$; $x_2 = x_1 + 0,5 = 4$ e $x_3 = x_n = b = 4,5$

Lembre-se que os lojistas Magazine Sul e KLM Veículos estimaram a variação do crescimento populacional estimando o valor da $\int_3^{4,5} f(x)\,dx = \int_3^{4,5} \left(200 + e^{0,6x}\right) dx$. Logo, a função em questão é $f(x) = 200 + e^{0,6x}$. Com base nisso, estimamos os erros em cada caso, como a seguir:

- Erro na integração pela Regra dos Trapézios

Como $f(x) = 200 + e^{0,6x}$, temos:

$$f'(x) = 0,6e^{0,6x} \qquad f''(x) = 0,36e^{0,6x}$$

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	3	3,5	4	4,5
$f''(x)$	2,18	2,94	3,97	5,36

$$máx\left\{\left|f''(x_i)\right|,\ i = 0,1,\ldots,n\right\} = 5,36$$

$$\left|E_T\right| \cong \frac{h^2}{12} \cdot (x_n - x_0) \cdot máx\left\{\left|f''(x_i)\right|,\ i = 0,1,\ldots,n\right\}$$

$$\left|E_T\right| \cong \frac{0,5^2}{12} \cdot (4,5 - 3) \cdot 5,36 = 0,17 \ \textbf{\textit{mil habitantes}}$$

- Erro na integração pela Regra de Simpson

Como $f(x) = 200 + e^{0,6x}$, temos:

$$f'(x) = 0,6e^{0,6x} \qquad f''(x) = 0,36e^{0,6x} \qquad f'''(x) = 0,216e^{0,6x}$$

$$f^{IV}(x) = 0,1296e^{0,6x}$$

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	3	3,5	4	4,5
$f^{IV}(x)$	0,78	1,06	1,43	1,93

$$máx\left\{\left|f^{IV}(x_i)\right|, i=0,1,\ldots,n\right\}=1,93$$

$$\left|E_S\right| \cong \frac{h^4}{180}\cdot(x_n-x_0)\cdot máx\left\{\left|f^{IV}(x_i)\right|,\ i=0,1,\ldots,n\right\}$$

$$\left|E_S\right| \cong \frac{0,5^4}{180}\cdot(4,5-3)\cdot 1,93=0,001\ \textbf{\textit{mil habitantes}}$$

Atenção!

Para que você tenha um maior embasamento, acesse:

<http://www.math.ist.utl.pt/~calves/cursos/RTrap.HTM>. Acesso em: 20 set. 2015.

Lembre-se

Para revisar as regras de derivação acesse:

<https://www.youtube.com/watch?v=zpI_Tc6fmCY>. Acesso em: 20 set. 2015.

Avançando na prática

<table>
<tr><th colspan="2">Pratique mais!</th></tr>
<tr><td colspan="2">Instrução
Desafiamos você a praticar o que aprendeu transferindo seus conhecimentos para novas situações que pode encontrar no ambiente de trabalho. Realize as atividades e depois compare-as com a de seus colegas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estudo dos Erros na Integração Numérica</td></tr>
<tr><td>1. Competência de fundamentos de área</td><td>Conhecer o Cálculo Numérico</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2. Objetivos de aprendizagem</td><td>Resolver problemas de integração fazendo uso de técnicas numéricas</td></tr>
<tr><td>3. Conteúdos relacionados</td><td>Estudo dos Erros na Integração Numérica</td></tr>
<tr><td>4. Descrição da situação-problema</td><td>Uma metrópole apresenta uma taxa de crescimento de profissionais com escolaridade equivalente ao nível superior completo dada por $f(x)[mil\ profissionais\ /\ ano]$ em função do tempo $x[ano]$:
$$f(x)=0,1\left(x^3-\sqrt{x^5}\right)$$
Calcule o erro na estimativa do número de profissionais com escolaridade equivalente ao nível superior completo entre 2 e 5 anos, quando utilizada a integração pela Regra dos Trapézios e pela Regra de Simpson, onde o tempo x varia de 1 em 1 ano, ou seja, $h=1ano$.</td></tr>
<tr><td>5. Resolução da situação-problema</td><td>Veja que já foi definido $h=1$, assim x_i:
$x_0=a=2$; $x_1=x_0+1=3$; $x_2=x_1+1=4$ e $x_3=x_n=b=5$
Como $f(x)=0,1\left(x^3-\sqrt{x^5}\right)$ é uma função de taxa de crescimento de profissionais com escolaridade equivalente ao nível superior completo e desejamos conhecer o número de profissionais com escolaridade equivalente ao nível superior completo entre 2 e 5 anos, então devemos calcular $\int_2^5 f(x)dx=\int_2^5\left[0,1\left(x^3-\sqrt{x^5}\right)\right]dx$. Calculemos então o erro:
Erro na integração pela Regra dos Trapézios
$$f^{'}(x)=0,3x^2-\frac{0,5}{2}x^{\frac{3}{2}} \qquad f''(x)=0,6x-0,375x^{1/2}$$
<table>
<tr><td></td><td>x_0</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td></tr>
<tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>$f''(x)$</td><td>0,67</td><td>1,15</td><td>1,65</td><td>2,16</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

$$máx\left\{\left|f''(x_i)\right|,\ i=0,1,\ldots,n\right\}=2{,}16$$

$$\left|E_T\right|\cong\frac{h^2}{12}\cdot\left(x_n-x_0\right)\cdot máx\left\{\left|f''(x_i)\right|,\ i=0,1,\ldots,n\right\}$$

$$\left|E_T\right|\cong\frac{1^2}{12}\cdot(5-2)\cdot 2{,}16=0{,}54\ \textbf{\textit{mil profissionais}}$$

Portanto, o erro devido a integração pela Regra dos Trapézios será 0,54 mil profissionais, ou seja, 540 profissionais.

Erro na integração pela Regra de Simpson

$$f'(x)=0{,}3x^2-\frac{0{,}5}{2}x^{3/2} \qquad f''(x)=0{,}6x-\frac{1{,}5}{4}x^{1/2}$$

$$f'''(x)=0{,}6-\frac{1{,}5}{8}x^{-1/2} \qquad f^{IV}(x)=\frac{1{,}5}{16}x^{-3/2}$$

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	2	3	4	5
$f^{IV}(x)$	0,03	0,02	0,01	0,01

$$máx\left\{\left|f^{IV}(x_i)\right|,\ i=0,1,\ldots,n\right\}=0{,}03$$

$$\left|E_S\right|\cong\frac{h^4}{180}\cdot\left(x_n-x_0\right)\cdot máx\left\{\left|f^{IV}(x_i)\right|,\ i=0,1,\ldots,n\right\}$$

$$\left|E_S\right|\cong\frac{1^4}{180}\cdot(5-2)\cdot 0{,}03=0{,}0005\ \textbf{\textit{mil profissionais}}$$

Portanto, o erro devido à integração pela Regra de Simpson será 0,0005 mil profissionais, ou seja, aproximadamente 1 profissional.

Faça você mesmo

Dada $\int_3^6\left[\sqrt[5]{x}+\ln(x)\right]dx$, calcule o erro se a integração for realizada pela Regra dos Trapézios e pela Regra de Simpson, ambas com $h=0{,}25$.

Faça valer a pena

1. Dada $\int_{1}^{4}\left[e^{t}+ln(t)-10\right]dt$, calcule o erro aproximado se a integração for realizada pela Regra dos Trapézios com $n=4$. Depois assinale a alternativa que contém o valor mais próximo:

a) 3,0.

b) 7,7.

c) 12,3.

d) 4,4.

e) 0,0.

2. Dada $\int_{1}^{5}\left[e^{t}+ln(t)-10\right]dt$, calcule o erro se a integração for realizada pela Regra de Simpson com $n = 5$. Depois assinale a alternativa que contém o valor mais próximo:

a) 0,1.

b) 12.

c) 3,2.

d) 5,4.

e) 2,9.

3. Dada $\int_{2}^{6}\left(x^{2}-2x^{-2/3}+5\right)dx$ calcule o erro aproximado se a integração for realizada pela Regra de Simpson com $n=5$. Depois assinale a alternativa que contém o valor mais próximo:

a) 4,32.

b) 5,43.

c) 7,47.

d) 3,92.

e) 0,01.

4. Dada $\int_{2}^{6}\left(x^{2}-2x^{-2/3}+5\right)dx$ calcule o erro se a integração for realizada pela Regra dos Trapézios com $h = 0{,}4$. Depois assinale a alternativa que contém o valor mais próximo:

a) 6,7.

b) 1,6.

c) 2,8.

d) 0,1.

e) 4,1.

5. Dada $\int_{\frac{1}{3}}^{4\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{2x})dx$, calcule o erro aproximado se a integração for realizada pela Regra dos Trapézios com $h = 0{,}8$. Depois assinale a alternativa que contém o valor mais próximo: (Nesta atividade estamos trabalhando com fração mista, sendo que os limites de integração e as alternativas também estão escritas dessa forma)

a) $10\frac{7}{8}$.

b) $5\frac{2}{3}$.

c) $6\frac{5}{16}$.

d) $4\frac{7}{8}$.

e) $\frac{28}{75}$.

6. Dada $\int_{1}^{6}(lnx)dx$, calcule o erro aproximado se a integração for realizada pela Regra de Simpson com $h = 1{,}25$:

7. Dada $\int_{1}^{6,1}\left(e^{-0,1x^{2}}\right)dx$, calcule o erro aproximado se a integração for realizada pela Regra dos Trapézios com $n = 3$:

Referências

ARENALES, Selma; DAREZZO, Artur. **Cálculo numérico**: aprendizagem com apoio de software. São Paulo: Thompson Learning, 2008.

CAVALCANTI, Jorge. **Cálculo numérico**: integração numérica. Disponível em: <http://www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti/8CN_integracao.pdf>. Acesso em: 6 out. 2015.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo numérico**. São Paulo: Pearson, 2006.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lucia da Rocha. **Cálculo numérico**: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luiz Henry Monken e. **Cálculo numérico**: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações