Mauro Noriaki Takeda

Pesquisa Operacional

APRESENTAÇÃO

É com satisfação que a Unisa Digital oferece a você, aluno(a), esta apostila de *Pesquisa Operacional*, parte integrante de um conjunto de materiais de pesquisa voltado ao aprendizado dinâmico e autônomo que a educação a distância exige. O principal objetivo desta apostila é propiciar aos(às) alunos(as) uma apresentação do conteúdo básico da disciplina.

A Unisa Digital oferece outras formas de solidificar seu aprendizado, por meio de recursos multidisciplinares, como *chats*, fóruns, aulas *web,* material de apoio e *e-mail*.

Para enriquecer o seu aprendizado, você ainda pode contar com a Biblioteca Virtual: www.unisa.br, a Biblioteca Central da Unisa, juntamente às bibliotecas setoriais, que fornecem acervo digital e impresso, bem como acesso a redes de informação e documentação.

Nesse contexto, os recursos disponíveis e necessários para apoiá-lo(a) no seu estudo são o suplemento que a Unisa Digital oferece, tornando seu aprendizado eficiente e prazeroso, concorrendo para uma formação completa, na qual o conteúdo aprendido influencia sua vida profissional e pessoal.

A Unisa Digital é assim para você: Universidade a qualquer hora e em qualquer lugar!

Unisa Digital

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Caro(a) aluno(a),

Esta apostila destina-se a estudantes de graduação para os cursos de Engenharia de Produção ou afins, para acompanhamento do conteúdo de pesquisa operacional, nos cursos a distância. Nela, você lerá a respeito de assuntos referentes à introdução à pesquisa operacional, modelagem de problemas, classificação de modelos matemáticos, modelagem em otimização, uso de algoritmos para solucionar modelos e cálculos em problemas na área de engenharia, programação linear, método simplex e utilização de pacote computacional (Excel) para resolução de problemas.

Com o intuito de simplificar a exposição dos tópicos abordados, procurou-se, por meio de uma linguagem simples, clara e direta, expor o conteúdo de forma sucinta e objetiva. Em todos os capítulos, são apresentadas questões resolvidas, para auxiliar na compreensão do conteúdo teórico e orientar a resolução das atividades propostas. Para complementar a teoria e auxiliar na fixação do conteúdo apresentado, são propostas, ao final de cada capítulo, várias atividades com grau de dificuldade crescente. Espera-se que você tenha facilidade na compreensão do texto apresentado, bem como na realização das atividades propostas.

Finalmente, desejamos que faça um excelente módulo, estude bastante e aprofunde seu conhecimento consultando as referências indicadas no final da apostila.

Mauro Noriaki Takeda

1 INTRODUÇÃO À PESQUISA OPERACIONAL

Caro(a) aluno(a),

Você sabe o que é pesquisa operacional? Já ouviu falar de Programação Linear (PL)? E do método simplex? É desses assuntos que vamos tratar agora, sendo que a pesquisa operacional é um método científico de tomada de decisões de grande importância, que está incluída como disciplina nos currículos de Engenharia, Economia, Administração, Química, Agronomia, Atuária, Ciência da Computação, Sistema de Informação e Estatística.

A pesquisa operacional é uma ciência que se aplica nas mais diversas áreas, como: organização e gerência, economia, pesquisa de mercado, eficiência e produtividade, organização de fluxos em fábricas, métodos de controle de qualidade, transporte, estoque, distribuição e localização.

No mundo globalizado em que vivemos, a sobrevivência de uma organização depende de um bom planejamento. Para o sucesso desse planejamento, a pesquisa operacional utiliza informações provenientes de todos os elementos do sistema de ação, tendo como características a pesquisa sobre as operações de toda a organização, a otimização das operações, a aplicação dos mais recentes métodos e técnicas científicos, o desenvolvimento e a utilização dos modelos analíticos.

A pesquisa operacional é um ramo interdisciplinar da matemática aplicada que utiliza modelos matemáticos e **algoritmos** que ajudam na tomada de decisões. É usada na análise de sistemas complexos do mundo real, com o objetivo de melhorar ou otimizar as operações.

Dicionário

Algoritmo: processo de cálculo destinado à solução de um problema, em que se estipulam, com generalidade e sem restrições, regras formais para a obtenção do resultado ou da solução do problema em um número finito de etapas.

1.1 Origem da Pesquisa Operacional

Sob o ponto de vista histórico, o primeiro passo para o estabelecimento das técnicas de PL ocorreu em 1936, quando Wassily Leontieff criou um modelo constituído por um conjunto de equações lineares. O uso de equações lineares apareceu mais tarde, em 1939, em um trabalho publicado pelo matemático russo L. V. Kantorovick sobre planejamento da produção.

Atenção

A palavra 'programação' não se refere à programação de computadores; ela tem o significado de planejamento.

Durante a Segunda Guerra Mundial, um grupo de cientistas foi convocado na Inglaterra com o objetivo de auxiliar nas decisões de guerra, para que estas fossem tomadas da melhor forma na utilização de recursos militares limitados. O trabalho desenvolvido por esse grupo marcou a primeira atividade formal de pesquisa operacional.

Os resultados positivos obtidos pela equipe de pesquisa operacional inglesa motivaram os Estados Unidos a iniciar atividades nessa área. Apesar de o crédito da origem da pesquisa operacional ser dado à Inglaterra, sua propagação deve-se principalmente à implantação de um projeto militar no Pentágono, do qual fazia parte o matemático americano George B. Dantzig, convocado durante a Segunda Guerra Mundial. O objetivo desse projeto era apoiar decisões operacionais das Forças Aéreas Americanas. No final desse projeto, concluído em 1947, Dantzig desenvolveu o método simplex para resolução de problemas de PL.

Saiba mais

A PL é uma técnica de planejamento de atividades baseada em matemática e economia para obter um resultado ótimo, isto é, que atenda da melhor maneira possível a um determinado objetivo.

Ao final da guerra, a utilização de técnicas de pesquisa operacional atraiu o interesse de diversas outras áreas. Com o aumento da velocidade de processamento e da quantidade de memória dos computadores atuais, que é um aliado natural da PL, houve uma evolução considerável da pesquisa operacional. A expansão da utilização de microcomputadores dentro de empresas faz com que os modelos desenvolvidos pelos profissionais de pesquisa operacional sejam mais rápidos, versáteis e também interativos, possibilitando a participação do usuário ao longo do processo de cálculo.

1.2 Problemas Típicos de Pesquisa Operacional

As principais características da pesquisa operacional são:

- análise das operações de toda a organização;
- otimização das operações;
- aplicação de métodos e técnicas científicos;
- desenvolvimento e utilização de modelos analíticos;
- projeto e utilização de operações experimentais.

Atualmente, a pesquisa operacional é de grande importância na tomada de qualquer decisão em uma organização. Essas decisões precisam ser tomadas de forma concisa, para atingir um determinado objetivo, e é aqui que entram os problemas de otimização. Os problemas tratados pela pesquisa operacional objetivam a otimização, que envolve a maximização dos lucros, minimização dos custos, alocação de recursos, designação de atividades, entre outros objetivos.

Podemos observar a grande variedade dessas aplicações na relação de algumas áreas em que a pesquisa operacional foi aplicada com algum sucesso:

- administração;
- agropecuária;
- economia e planejamento econômico;
- educação e saúde;
- energia;
- engenharia;
- forças armadas;
- investimentos e finanças;

- localização, armazenamento e distribuição;
- planejamento e controle da produção;
- planejamento urbano e regional;
- recursos hídricos;
- siderurgia;
- telecomunicações;
- transporte.

As técnicas utilizadas na pesquisa operacional permitem que se resolva uma variedade enorme de problemas, entre os quais se destacam:

- alocação de recursos;
- localização e distribuição da produção;
- estoque;
- substituição e reposição de equipamentos;
- sequenciamento e coordenação de tarefas;
- determinação de rotas;
- situações de competição (teoria dos jogos);
- busca de informação;
- filas de espera;
- fluxos em rede;
- problemas de características híbridas.

1.3 Métodos de Pesquisa Operacional

A pesquisa operacional utiliza como ferramenta a modelagem matemática, isto é, um modelo matemático que reproduz o problema abordado em linguagem matemática, permitindo a busca de uma solução numérica ótima. Na resolução desses modelos, são utilizadas várias ferramentas da matemática, como álgebra linear, Teoria dos Grafos, Teoria da Probabilidade e métodos numéricos.

Um problema de otimização que possui seu objetivo e suas restrições expressos como funções matemáticas pode ser classificado de acordo com as técnicas utilizadas para a resolução dos modelos matemáticos.

Algumas dessas técnicas de pesquisa operacional são:

- **PL:** tem sido usada com sucesso na solução de problemas relativos à alocação de pessoal, mistura de materiais, distribuição, transporte, carteira de investimento e avaliação da eficiência;
- **programação inteira:** é uma forma de PL em que as variáveis podem apenas apresentar números inteiros. Tem sido utilizada na resolução de problemas de investimento, entre outros;
- **programação mista:** é uma forma de PL em que as variáveis podem assumir valores binários, inteiros e contínuos. Este modelo também é definido como otimização combinatória;
- **programação não linear:** é um modelo matemático em que a função objetivo, as restrições ou ambas apresentam não linearidade em seus coeficientes.

1.4 Exercício Resolvido

1. Faça uma breve descrição do que é pesquisa operacional.

Resolução:

Pesquisa operacional é uma ciência utilizada na tomada de decisões nas mais diversas áreas, como organização e gerência, economia, pesquisa de mercado, eficiência e produtividade, organização de fluxos em fábricas, métodos de controle de qualidade, transporte, estoque, distribuição e localização.

A sobrevivência de uma organização depende de um bom planejamento e isso pode ser obtido por meio da pesquisa operacional, com a otimização das operações por meio da aplicação dos mais recentes métodos e técnicas científicos. Algumas dessas técnicas são: PL, programação inteira, programação mista e programação não linear.

1.5 Resumo do Capítulo

Caro(a) aluno(a),

Você verificou, neste capítulo, que a pesquisa operacional é um método científico de tomada de decisões de grande importância e se aplica nas mais diversas áreas, como: organização e gerência, economia, pesquisa de mercado, eficiência e produtividade, organização de fluxos em fábricas, métodos de controle de qualidade, transporte, estoque, distribuição e localização.

Sua origem ocorreu durante a Segunda Guerra Mundial e, posteriormente, com o aumento da velocidade de processamento e da quantidade de memória dos computadores, houve uma evolução considerável da pesquisa operacional.

A pesquisa operacional utiliza um modelo matemático que reproduz o problema abordado, permitindo a busca de uma solução numérica ótima.

1.6 Atividades Propostas

1. Quais são as principais características da pesquisa operacional?
2. Cite três técnicas utilizadas na pesquisa operacional.

2 MODELAGEM

Caro(a) aluno(a),

Você já ouviu falar de modelagem? A modelagem que você conhece provavelmente está relacionada com as artes plásticas. Aqui, nós vamos conhecer a modelagem de problemas de pesquisa operacional.

Um modelo é uma representação de um sistema real que pretende reproduzir o funcionamento do sistema, de modo a aumentar sua produtividade, podendo ser utilizado para definir a estrutura ideal do sistema. Sua formulação depende diretamente do sistema a ser representado. A função objetivo e as funções de restrições podem ser lineares ou não lineares, as variáveis de decisão podem ser contínuas ou discretas e os parâmetros podem ser determinísticos ou probabilísticos.

O resultado dessa diversidade de representações de sistemas é o desenvolvimento de diversas técnicas de otimização, como a PL, a programação inteira, a programação não linear e outras, de modo a resolver cada tipo de modelo existente.

2.1 Fases do Estudo de Pesquisa Operacional

Um estudo de pesquisa operacional costuma envolver as seguintes fases:

- definição do problema;
- construção do modelo do sistema;
- cálculo da solução por meio do modelo;
- validação do modelo;
- **implementação** do modelo.

Essas fases são as principais etapas a ser vencidas, não sendo necessariamente nessa ordem.

Dicionário

Implementação: ato de dar execução a um plano, programa ou projeto.

2.2 Definição do Problema

A definição do problema baseia-se em três aspectos fundamentais:

- descrição exata dos objetivos do estudo (a partir da qual o modelo é concebido);
- identificação das alternativas de decisão existentes;
- reconhecimento das limitações, restrições e exigências do sistema.

2.3 Formulação do Modelo Matemático

A formulação do modelo matemático para o problema é o desenvolvimento do modelo matemático para o problema. Existem várias técnicas a ser aplicadas na solução dos modelos matemáticos. A escolha da técnica adequada é feita em função das características do modelo que representa o problema, porém há situações tão complexas que não existem modelos analíticos para representá-las. Quando isso ocorre, o recurso é desenvolver modelos de simulação, que, utilizando a capacidade de processamento dos computadores, fazem uma aproximação do comportamento desses sistemas.

Em um modelo matemático de um problema de otimização, a quantidade a ser maximizada ou minimizada é descrita como uma função matemática dos recursos (variáveis de decisão) escassos.

$$Z = f(X_i, Y_j)$$

Na qual:

Z = medida de desempenho do sistema.

Xi = variáveis que podem ser controladas ou variáveis de decisão.

Yj = variáveis independentes.

f = relação funcional entre Z, Xi e Yj.

2.4 Solução do Modelo

O objetivo aqui é encontrar a solução para o modelo proposto. A escolha do sistema é de fundamental importância para a qualidade da solução fornecida. A solução é obtida pelo algoritmo mais adequado, em termos de rapidez de processamento e precisão da resposta.

Saiba mais

A solução obtida é chamada "ótima".

Atenção

O objetivo geral de um problema de programação matemática é a busca por um ótimo, que pode ser um máximo ou o mínimo de uma função.

2.5 Validação do Modelo

Nesse processo de solução do problema, é necessário verificar a validação do modelo. A confiabilidade da solução obtida por meio do modelo depende da validação do modelo na representação do sistema real. A validação do modelo é a confirmação de que ele realmente representa o sistema real.

Um método muito utilizado para testar a validade do sistema é analisar seu desempenho utilizando dados anteriores do sistema e verificar se ele reproduz o comportamento que o sistema apresentou.

2.6 Exercício Resolvido

1. O que é validação do modelo?

Resolução:

A validação do modelo é a confirmação de que ele realmente representa o sistema real e, consequentemente, a confiabilidade da solução obtida por meio do modelo. Pode ser obtida pela análise do seu desempenho utilizando dados anteriores do sistema e verificando se ele reproduz o comportamento que o sistema apresentou.

2.7 Resumo do Capítulo

Caro(a) aluno(a),

Você deve ter notado que a formulação do modelo depende diretamente do sistema a ser representado e envolve as seguintes fases:

- definição do problema;
- construção do modelo do sistema;
- cálculo da solução por meio do modelo;
- validação do modelo;
- implementação do modelo.

Em um modelo matemático de um problema de otimização, a quantidade a ser maximizada ou minimizada é uma função matemática dos recursos, ou seja:

$$Z = f(X_i, Y_j)$$

Além disso, é necessária a validação do modelo para sua efetiva implementação.

2.8 Atividades Propostas

1. Quais são as fases envolvidas em um estudo de pesquisa operacional?
2. Qual é o objetivo geral de um problema de programação matemática?

3 PL

Caro(a) aluno(a),

Você sabia que a PL encontrou um aliado muito poderoso? Esse aliado é o computador, que, com a evolução e aumento da velocidade de processamento, se tornou aliado naturalmente. Então, preparado(a) para aprender sobre PL?

A PL é uma técnica de planejamento e otimização, e uma ferramenta utilizada para encontrar o lucro máximo ou o custo mínimo em situações nas quais temos diversas alternativas de escolha sujeitas a algum tipo de restrição ou regulamentação. Teve seu desenvolvimento acelerado com o surgimento dos computadores e encontra-se muito difundida em vários setores da sociedade. Hoje, não podemos falar de pesquisa operacional sem mencionar a PL.

Atualmente, é uma ferramenta padrão que tem possibilitado altos lucros para a maioria das companhias nos países industrializados. As aplicações de PL fazem parte de rotinas diárias de planejamento nas mais variadas empresas, como nas que possuem uma equipe de planejamento e nas que simplesmente adquiriram um *software* para aplicação da PL.

A palavra 'linear' significa que todas as funções matemáticas do modelo são funções lineares. A PL é utilizada para otimizar (maximizar ou minimizar) uma função linear de variáveis, chamada função objetivo, sujeita a uma série de restrições representadas por meio de equações ou **inequações** lineares.

Dicionário

Inequação: é uma sentença aberta expressa por uma desigualdade entre duas expressões algébricas.

A formulação do problema a ser resolvido utilizando PL obedece a algumas etapas básicas:

- deve ser definido o objetivo básico do problema, ou seja, a otimização a ser alcançada. Por exemplo: maximização de lucro ou desempenhos, minimização de custos ou de perdas. Tal objetivo será representado por uma função objetivo a ser maximizada ou minimizada;
- para que essa função matemática seja devidamente especificada, devem ser definidas as variáveis de decisão envolvidas. Por exemplo: número de máquinas, mão de obra disponível;
- essas variáveis normalmente estão sujeitas a uma série de restrições, normalmente representadas por inequações. Por exemplo: quantidade de equipamentos disponível, tempo disponível.

3.1 Construção do Modelo Matemático

Para a elaboração de um modelo matemático, é necessário determinar três conjuntos principais de elementos:

1. **variáveis de decisão e parâmetros:** as variáveis de decisão são as incógnitas a ser determinadas pela solução do modelo e os parâmetros são valores fixos no problema;
2. **restrições:** são as limitações físicas do sistema; portanto, no modelo, devem ser incluídas as restrições que limitam as variáveis de decisão a seus valores possíveis ou viáveis;
3. **função objetivo:** é a função matemática que define a qualidade da solução (ótima) em função das variáveis de decisão.

O problema geral de PL possui as seguintes características:

Otimizar (maximizar ou minimizar):

$$\underline{Z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

Na qual:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Sujeito a:

$$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\left.\right\} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \left\{ b_i \right.$$

Na qual:

$$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

Ou seja:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \left.\right\} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \left\{ b_1 \right.$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \left.\right\} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \left\{ b_2 \right.$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \left.\right\} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \left\{ b_m \right.$$

Com:

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

Sendo n o número de variáveis, m o número de restrições do problema e i o índice de uma determinada restrição.

3.2 Exercício Resolvido

1. Uma fábrica produz um equipamento em dois modelos: padrão e luxo. A linha de produção do modelo padrão comporta no máximo 24 funcionários e a do modelo luxo, 32 funcionários. Cada equipamento padrão consome 1 homem/dia para ser produzido, enquanto o modelo luxo requer 2 homens/dia para cada equipamento. A fábrica possui 40 funcionários no total, que podem ser alocados nas duas linhas de produção. Sabendo que cada modelo padrão fornece lucro de R$ 30,00 e cada modelo luxo, lucro de R$ 40,00, qual deve ser o esquema de produção para maximizar o lucro diário?

Resolução:

Vamos começar a elaborar o modelo definindo as variáveis básicas, que são as quantidades a ser produzidas do modelo padrão e do modelo luxo. Vamos chamar a quantidade padrão e a quantidade luxo.

Os parâmetros são:

- linha de produção padrão: 24;
- linha de produção luxo: 32;
- total de funcionários disponíveis: 40.

Como devemos maximizar o lucro, sabendo que cada modelo padrão fornece lucro de R$ 30,00 e cada modelo luxo, R$ 40,00, a função objetivo Z será:

$$Z=30x_1+40x_2$$

As restrições são:

- produção do modelo padrão: esta linha de produção comporta no máximo 24 funcionários e cada equipamento requer 1 homem/dia; portanto, a produção máxima diária desta linha é de 24 equipamentos. Desse modo, podemos escrever matematicamente: $x_1 \leq 24$
- produção do modelo luxo: esta linha de produção comporta no máximo 32 funcionários e cada equipamento requer 2 homens/dia para ser produzido; portanto, a produção máxima diária desta linha é de 16 equipamentos. Desse modo, podemos escrever matematicamente: $x_2 \leq 16$
- disponibilidade máxima de funcionários: a linha de produção padrão irá produzir equipamentos por dia e, como cada equipamento requer 1 homem/dia, serão necessários $1x_1$ funcionários. A linha de produção luxo irá produzir equipamentos por dia e, como cada equipamento requer 2 homens/dia, serão necessários $2x_2$ funcionários. Visto que temos 40 funcionários disponíveis, podemos escrever essa restrição como:

$$1x_1 + 2x_2 \leq 40$$

Portanto, o modelo é:

Maximizar:

$$Z = 30x_1 + 40x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 \leq 24$$
$$x_2 \leq 16$$
$$1x_1 + 2x_2 \leq 40$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

3.3 Método Gráfico

Você deve estar se perguntando: gráfico? Hoje, o pessoal da área administrativa utiliza muito o recurso de gráfico, deixando de ser uma ferramenta exclusiva do pessoal de exatas. O gráfico ajuda muito na visualização e compreensão de resultados e, em alguns casos, ele fala por si só.

Nos problemas de pesquisa operacional que envolvem apenas duas variáveis de decisão, a solução ótima de um modelo de PL pode ser resolvida por meio do método gráfico.

Atenção

O método gráfico só pode ser utilizado quando existirem duas (bidimensional) ou, no máximo, três variáveis, o que o torna de difícil visualização, visto que é tridimensional.

Para encontrar a solução ótima, é necessário encontrar um vértice da **região viável** que forneça o maior valor possível (problema de maximização) para a função objetivo.

Dicionário

Região viável: região que contém pelo menos um ponto exequível, factível.

A solução gráfica pode ser feita em três passos:

a) identificação e construção das retas de restrição;
b) identificação da região viável;
c) identificação do ponto ótimo.

Para concretizar esses passos, inicialmente, deve-se construir um sistema cartesiano, com os seus eixos sendo as duas variáveis x_1 e x_2. A partir daí, traçam-se as retas referentes às restrições do problema e delimita-se a região viável. Encontrada a região viável, deve-se traçar uma reta com a declividade da função objetivo. Traçam-se, então, diversas retas paralelas a ela no sentido de *Z* crescente até encontrar o ponto ótimo, que é o ponto no qual a reta assume o maior valor possível, cortando a região viável (normalmente num vértice).

3.4 Exercícios Resolvidos

1. Obtenha graficamente a solução ótima para o problema a seguir, por meio do deslocamento da função objetivo:

Maximizar:

$$receita = 0{,}3x_1 + 0{,}5x_2$$

Sujeito a:

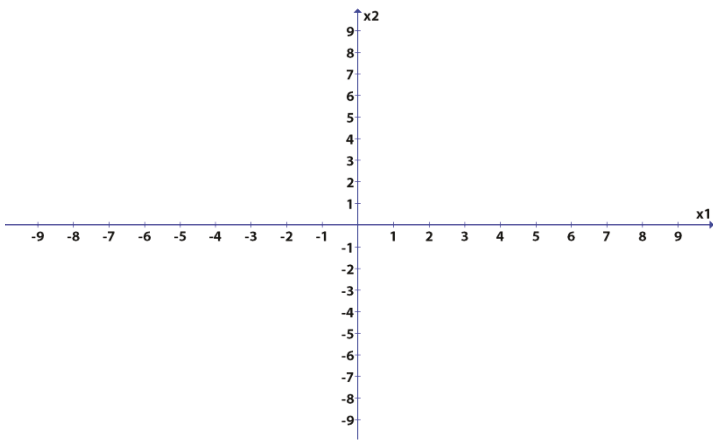
$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Resolução:

Vamos construir um sistema cartesiano, no qual o eixo das abscissas será a variável e o eixo das ordenadas será a variável x_2.



Para construir o gráfico da primeira restrição, $2x_1 + x_2 \leq 2$, vamos determinar dois valores para x_1 e x_2, visto que é uma reta, a partir da equação $2x_1 + x_2 = 2$.

Atribuindo o valor $x_1 = 0$, temos:

$$2 \cdot 0 + x_2 = 2$$

$$x_2 = 2$$

Atribuindo o valor $x_2 = 0$, temos:

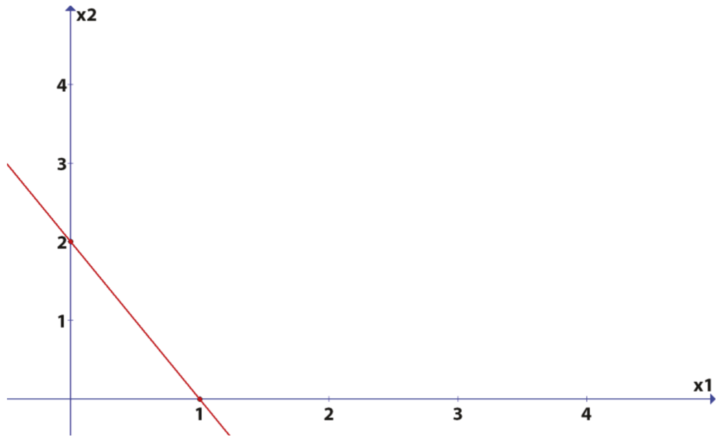
$$2x_1 + 0 = 2$$

$$x_1 = 1$$

Colocando esses resultados em uma tabela, temos:

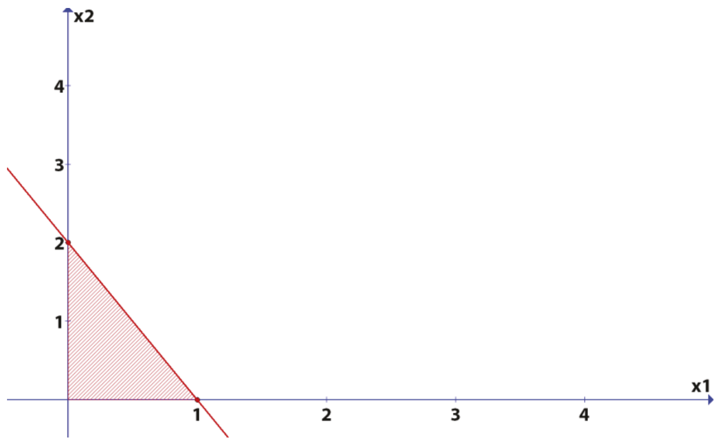
x_1	x_2
0	2
1	0

Localizando esses pontos no plano cartesiano e traçando a reta, temos:



Aqui, mostramos somente o primeiro quadrante do plano cartesiano, visto que as variáveis podem receber somente valores positivos.

Como a restrição é $2x_1 + x_2 \leq 2$, a região de interesse é a hachurada.



Para construir o gráfico da segunda restrição, $x_1 + 3x_2 \leq 3$, vamos determinar dois valores para x_1 e x_2, visto que é uma reta, a partir da equação $x_1 + 3x_2 = 3$.

Atribuindo o valor $x_1 = 0$, temos:

$$0 + 3x_2 = 3$$

$$x_2 = 1$$

Atribuindo o valor $x_2 = 0$, temos:

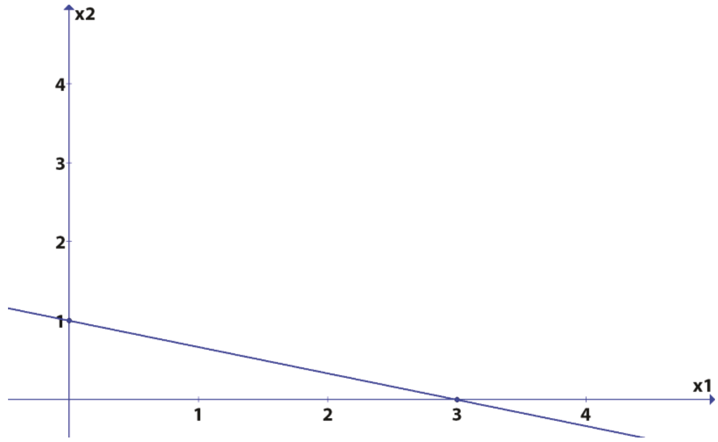
$$x_1 + 3 \cdot 0 = 3$$

$$x_1 = 3$$

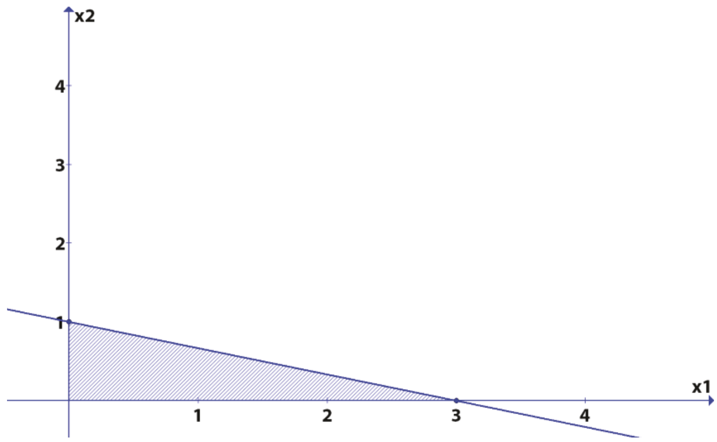
Colocando esses resultados em uma tabela, temos:

x_1	x_2
0	1
3	0

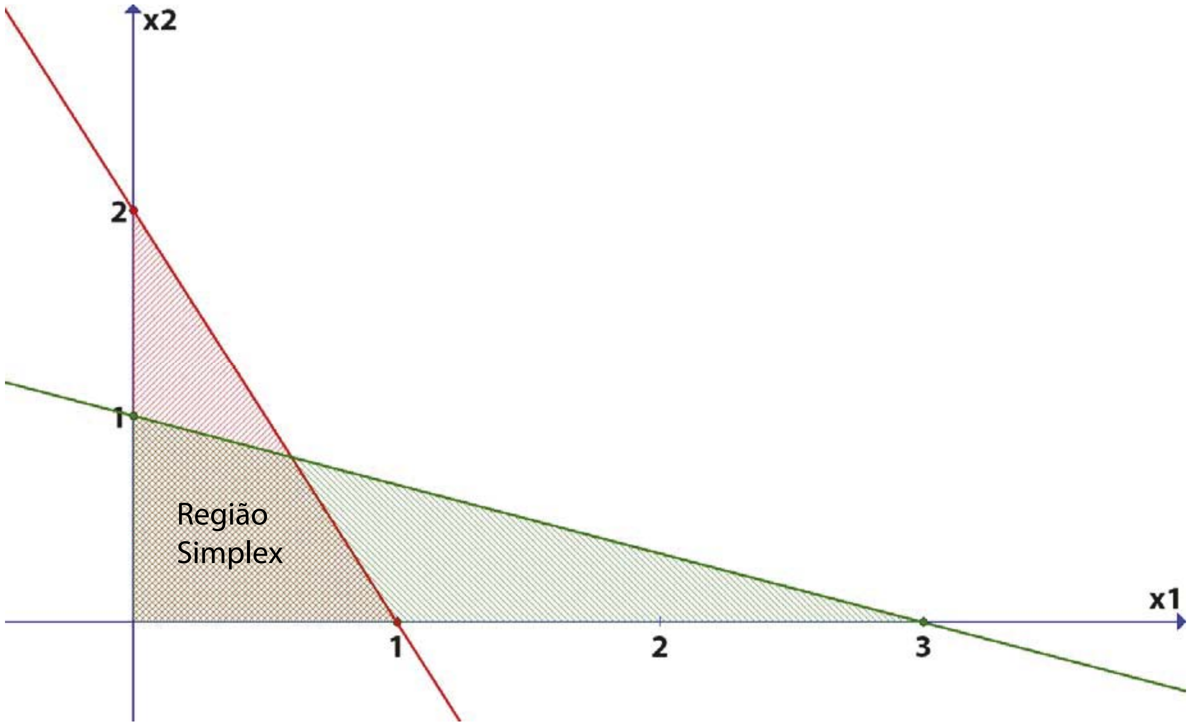
Localizando esses pontos no plano cartesiano e traçando a reta, temos:



Como a restrição é $x_1 + 3x_2 \leq 3$, a região de interesse é a hachurada.



Colocando todas as restrições em único gráfico, obtemos a interseção de todas as restrições, representada pela região de hachura .

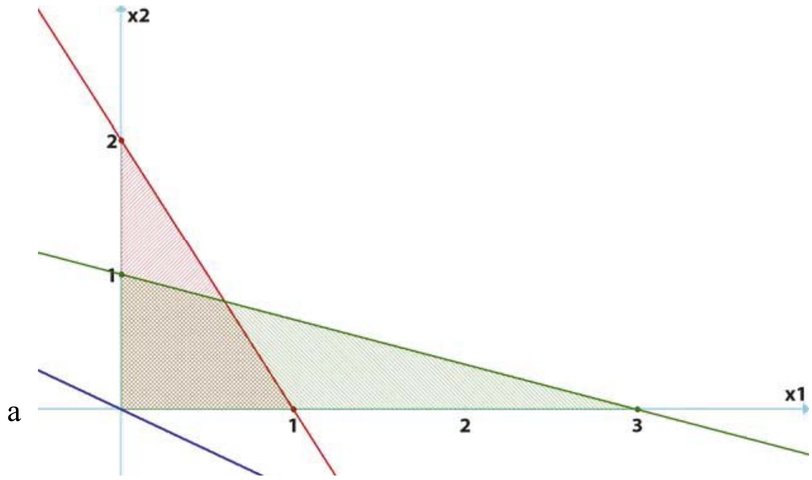


Essa região recebe o nome região convexa simplex, que representa o conjunto de soluções viáveis.

Saiba mais

A região convexa simplex também é chamada região viável ou região factível.

Após o estabelecimento da região viável, o próximo passo é a determinação das curvas de nível que representam a função objetivo. Inicialmente, precisamos identificar dois pontos em que a curva de nível da função objetivo tem o mesmo valor. Normalmente, os valores de X e Y iguais a zero (0) zeram a função objetivo, exceto quando a função contém alguma constante (reta a).



A função objetivo $receita = 0{,}3x_1 + 0{,}5x_2$ pode ser transformada em:

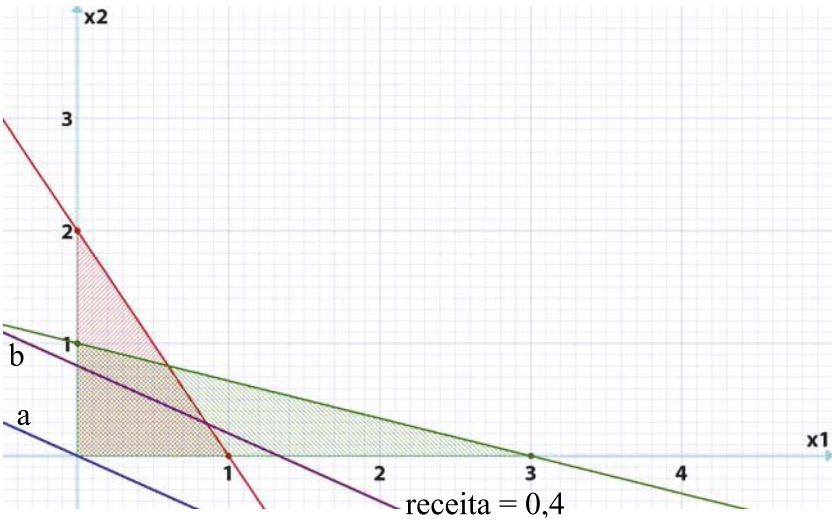
$$receita - 0{,}3x_1 = 0{,}5x_2$$

ou

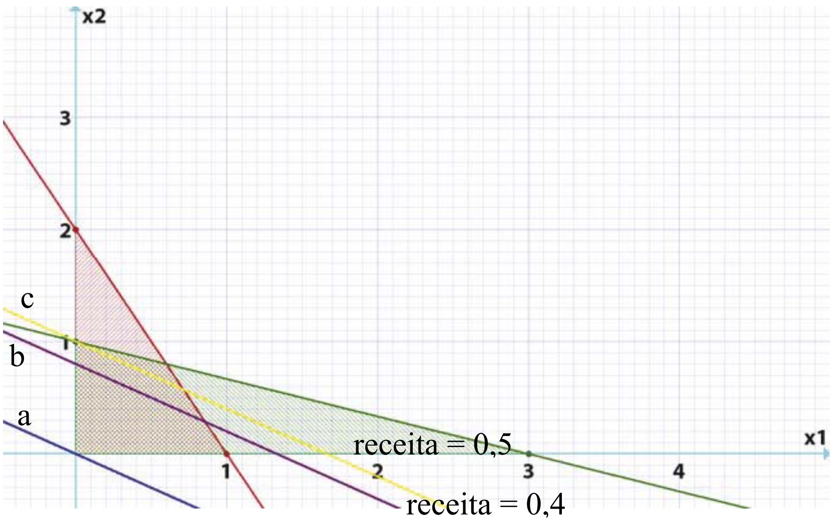
$$0{,}5x_2 = -0{,}3x_1 + receita$$

$$x_2 = -\frac{0{,}3x_1}{0{,}5} + \frac{receita}{0{,}5}$$

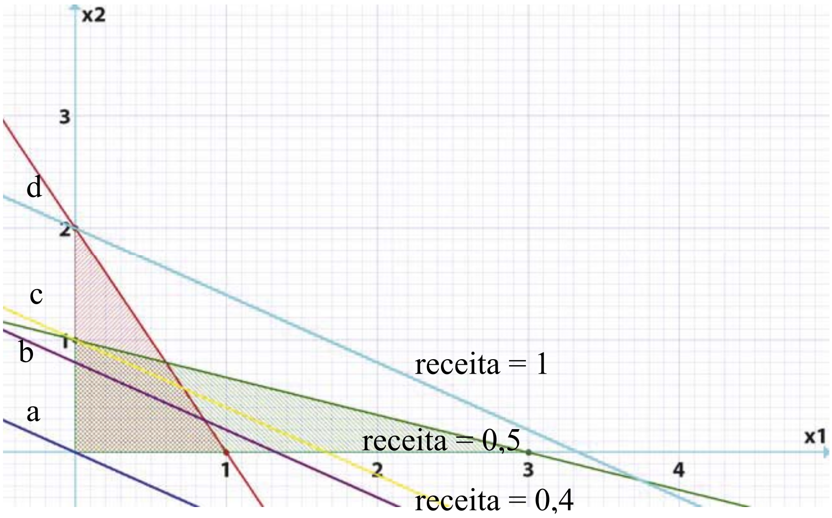
Observe que essa equação corresponde à equação da reta $y = ax + b$, na qual $a = -\frac{0{,}3}{0{,}5}$ é o coeficiente angular e $b = \frac{receita}{0{,}5}$, o coeficiente linear. Se variarmos o valor da receita, obtemos retas paralelas à reta a, visto que o coeficiente angular é o mesmo. Para receita de 0,4, temos a reta b:



Para receita de 0,5, temos a reta c:

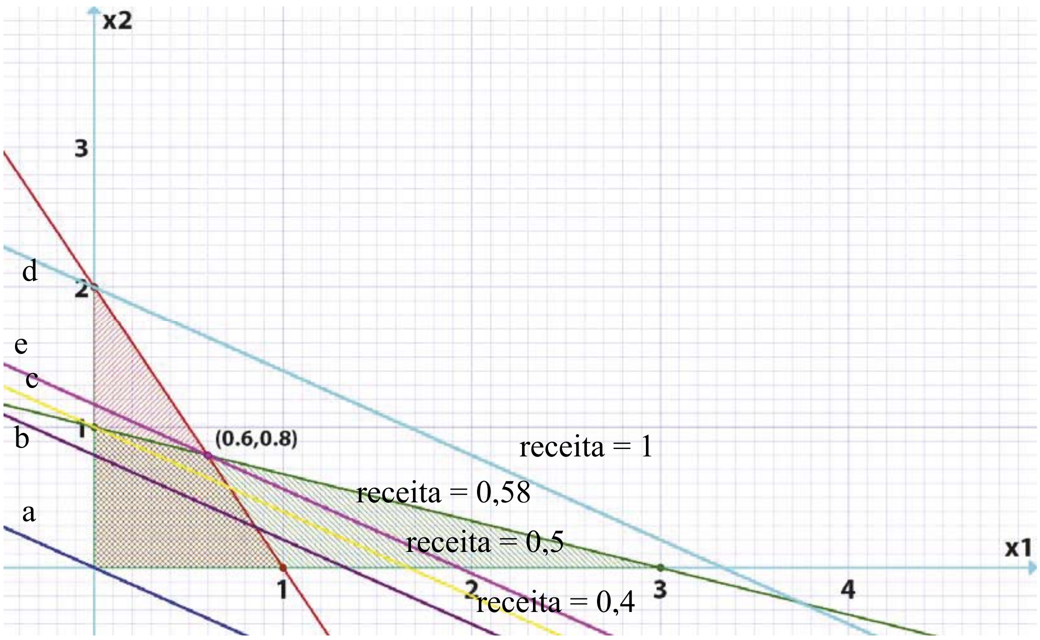


São, então, traçadas diversas paralelas a ela no sentido de Z crescente (maximização da função), como na figura. Para receita 1, temos a reta d:



Observe que a reta d não intercepta a região simplex, portanto não satisfaz a maximização da função.

O ponto ótimo é o ponto no qual a reta de maior valor possível corta a região viável (normalmente num vértice); na figura, corresponde à reta e:



Para a solução ótima, temos $x_1 = 0{,}6$ e $x_2 = 0{,}8$. Substituindo esses valores na função objetivo $receita = 0{,}3x_1 + 0{,}5x_2$, temos:

$$receita = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}8$$

$$receita = 0{,}18 + 0{,}4$$

$$receita = 0{,}58$$

Portanto, a solução ótima é:

$$x_1 = 0{,}6\ unidades$$
$$x_2 = 0{,}8\ unidades$$
$$receita = 0{,}58\ unidades$$

2. Obtenha graficamente a solução ótima para o problema a seguir, por meio do deslocamento da função objetivo:

Minimizar:

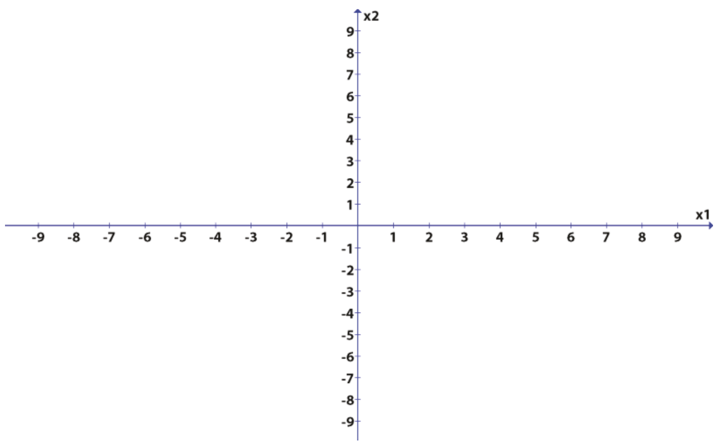
$$custo = 11x_1 + 12x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 \leq 20$$
$$x_1 + x_2 \geq 10$$
$$5x_1 + 6x_2 \geq 54$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Resolução:

Vamos construir um sistema cartesiano, no qual o eixo das abscissas será a variável x_1 e o eixo das ordenadas será a variável x_2.



Para construir o gráfico da primeira restrição, $x_1 + x_2 \leq 20$, vamos determinar dois valores para x_1 e x_2, visto que é uma reta, a partir da equação $x_1 + x_2 = 20$.

Atribuindo o valor $x_1 = 0$, temos:

$$0 + x_2 = 20$$
$$x_2 = 20$$

Atribuindo o valor $x_2 = 0$, temos:

$$x_1 + 0 = 20$$

$$x_1 = 20$$

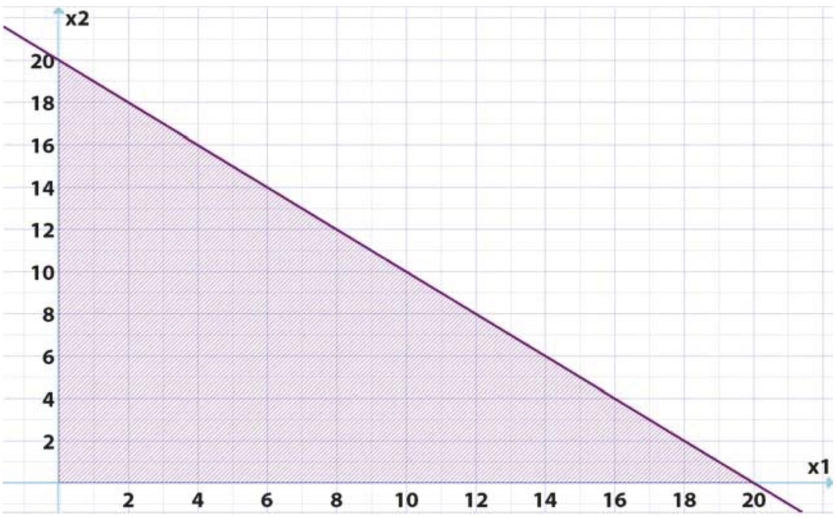
Colocando esses resultados em uma tabela, temos:

x_1	x_2
0	20
20	0

Localizando esses pontos no plano cartesiano e traçando a reta, temos:

Aqui, mostramos somente o primeiro quadrante do plano cartesiano, visto que as variáveis podem receber somente valores positivos.

Como a restrição é $x_1 + x_2 \leq 20$, a região de interesse é a hachurada.



Para construir o gráfico da segunda restrição, $x_1 + x_2 \geq 10$, vamos determinar dois valores para x_1 e x_2, visto que é uma reta, a partir da equação $x_1 + x_2 = 10$.

Atribuindo o valor $x_1 = 0$, temos:

$$0 + x_2 = 10$$

$$x_2 = 10$$

Atribuindo o valor $x_2 = 0$, temos:

$$x_1 + 0 = 10$$

$$x_1 = 10$$

Colocando esses resultados em uma tabela, temos:

x_1	x_2
0	10
10	0

Localizando esses pontos no plano cartesiano e traçando a reta, temos:

Como a restrição é $x_1 + x_2 \geq 10$, a região de interesse é a hachurada.

Para construir o gráfico da terceira restrição, $5x_1 + 6x_2 \geq 54$, vamos determinar dois valores para x_1 e x_2, visto que é uma reta, a partir da equação $5x_1+6x_2 = 54$.

Atribuindo o valor $x_1 = 0$, temos:

$$5 \cdot 0 + 6x_2 = 54$$

$$x_2 = \frac{54}{6}$$

$$x_2 = 9$$

Atribuindo o valor $x_2 = 0$, temos:

$$5 \cdot x_1 + 6 \cdot 0 = 54$$

$$x_1 = \frac{54}{5}$$

$$x_1 = 10{,}8$$

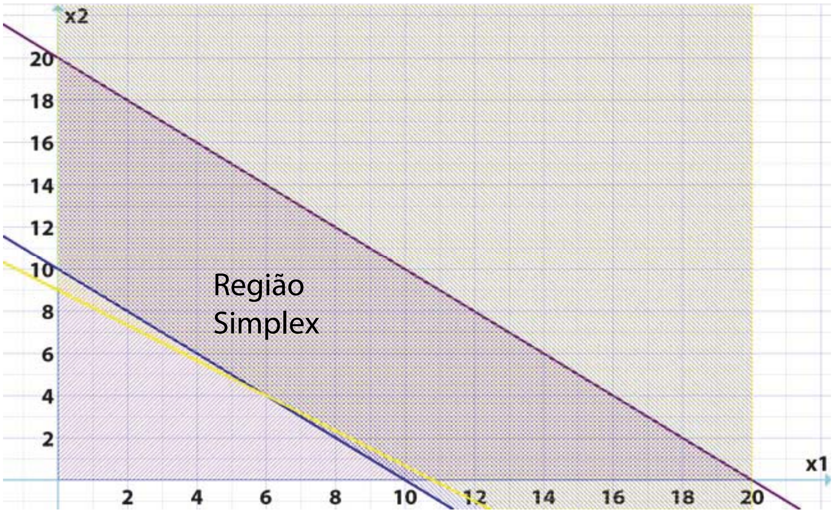
Colocando esses resultados em uma tabela, temos:

x_1	x_2
0	9
10,8	0

Localizando esses pontos no plano cartesiano e traçando a reta, temos:

Como a restrição é $5x_1 + 6x_2 \geq 54$, a região de interesse é a hachurada.

Colocando todas as restrições em único gráfico, obtemos a interseção de todas as restrições, representada pela região de hachura .



Essa região recebe o nome região convexa simplex, que representa o conjunto de soluções viáveis.

Após o estabelecimento da região viável, o próximo passo é a determinação das curvas de nível que representam a função objetivo. Inicialmente, precisamos identificar dois pontos em que a curva de nível da função objetivo tem o mesmo valor. Normalmente, os valores de X e Y iguais a zero (0) zeram a função objetivo, exceto quando a função contém alguma constante (reta a).

a

A função objetivo $custo = 11x_1 + 12x_2$ pode ser transformada em:

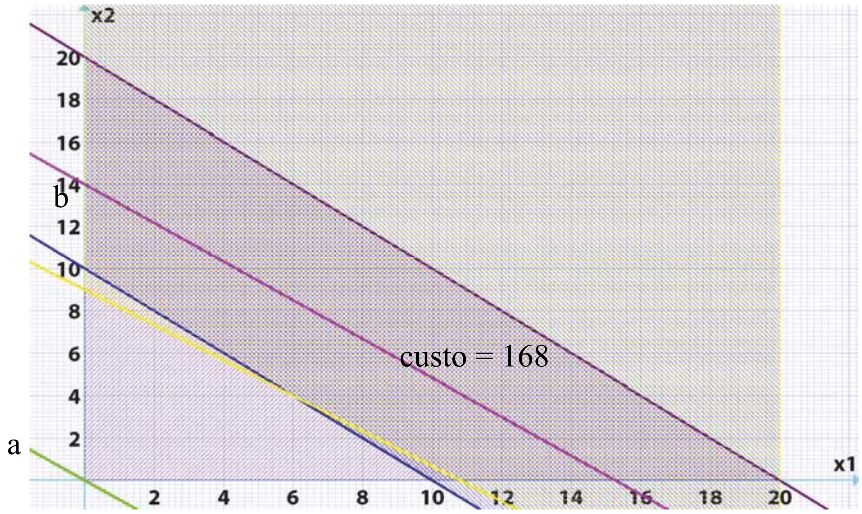
$$custo - 11x_1 = 12x_2$$

ou

$$12x_2 = -11x_1 + custo$$

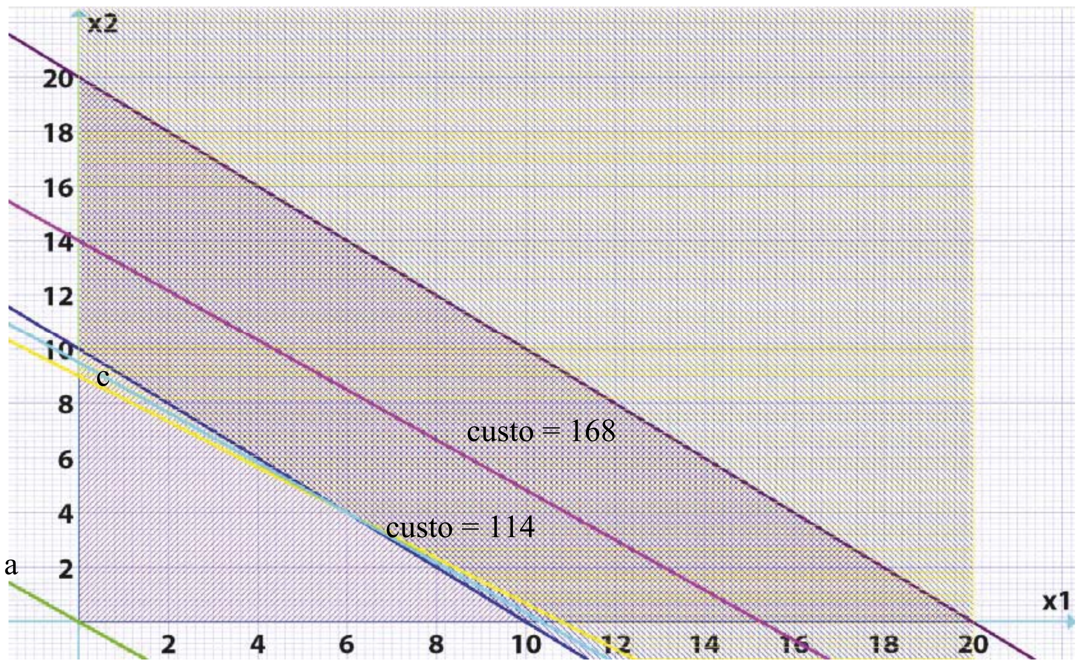
$$x_2 = -\frac{11x_1}{12} + \frac{custo}{12}$$

Observe que essa equação corresponde à equação da reta $y = ax + b$, na qual $a = -\frac{11}{12}$ é o coeficiente angular e $b = \frac{custo}{12}$, o coeficiente linear. Se variarmos o valor do custo, obtemos retas paralelas à reta a, visto que o coeficiente angular é o mesmo. Para custo de 168, temos a reta b:



Observe que a reta b intercepta a região simplex, mas não é o menor custo possível; portanto, ela não satisfaz a minimização da função.

O ponto ótimo é o ponto no qual a reta de menor valor possível corta a região viável (normalmente num vértice); na figura, corresponde à reta c:



Para a solução ótima, temos $x_1 = 6$ e $x_2 = 4$. Substituindo esses valores na função objetivo $custo = 11x_1 + 12x_2$, temos:

$$custo = 11 \cdot 6 + 12 \cdot 4$$

$$custo = 66 + 48$$

$$custo = 114$$

Portanto, a solução ótima é:

$$x_1 = 6\, unidades$$

$$x_2 = 4\, unidades$$

$$custo = 114\, unidades$$

3.5 Resumo do Capítulo

Caro(a) aluno(a),

Neste capítulo, você estudou que a PL é uma técnica de planejamento e otimização utilizada para maximizar ou minimizar uma função linear de variáveis, chamada função objetivo, sujeita a uma série de restrições representadas por meio de equações ou inequações lineares.

Você viu também que é necessário determinar três conjuntos principais de elementos: variáveis de decisão e parâmetros, restrições e função objetivo; e aprendeu a utilizar as variáveis para montar a função e as inequações com as restrições. Ainda, estudou o método gráfico para determinar a solução ótima dos problemas de otimização que envolvem duas variáveis, para maximizar o lucro ou minimizar os custos.

Agora, vamos fazer alguns exercícios para treinar o que acabamos de estudar? Tenha em mãos lápis, régua e papel milimetrado para facilitar a confecção dos gráficos.

3.6 Atividades Propostas

1. Monte o modelo de PL do seguinte problema: um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos, e 5 cintos por hora, se fizer somente cintos. Ele gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade couro para fabricar 1 unidade de cinto. Sabendo que o total disponível de couro é de 6 unidades e que o lucro unitário por sapato é de 5 unidades monetárias e por cinto é de 2 unidades monetárias, pede-se o modelo do sistema de produção do sapateiro, sendo o objetivo maximizar seu lucro por hora.

2. Resolva graficamente o modelo:

   Maximizar:

$$Lucro = 2x_1 + 3x_2$$

   Sujeito a:

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

3. Resolva graficamente o problema a seguir: uma fábrica produz dois tipos de produto: standard e luxo. Cada modelo *standard* requer 4 horas de corte e 2 horas de polimento; cada modelo luxo requer 2 horas de corte e 5 horas de polimento. A fábrica possui 2 cortadoras e 3 polidoras. Sabendo que a semana de trabalho da fábrica é de 40 horas, que cada modelo *standard* dá um lucro de R$ 3,00 e cada modelo luxo, R$ 4,00 e que não há restrição de demanda, pede-se para determinar a produção da fábrica que maximiza o lucro.

4 MÉTODO SIMPLEX

Caro(a) aluno(a),

Agora você já sabe o que é pesquisa operacional e PL, bem como conhece o método gráfico para resolver problemas com duas variáveis; vamos conhecer um método analítico para resolver esses problemas. Está pronto(a)? Então, vamos lá!

Quando o problema de pesquisa operacional apresenta mais que duas variáveis, uma maneira de tentar resolvê-lo é utilizando o método simplex, que é um algoritmo para determinar numericamente a solução ótima de um modelo de PL, ou seja, é um método analítico.

Esse método é constituído por um grupo de critérios para escolha de soluções básicas que melhorem o desempenho do modelo, até encontrar uma solução que não possua soluções vizinhas melhores que ela, que é a solução ótima.

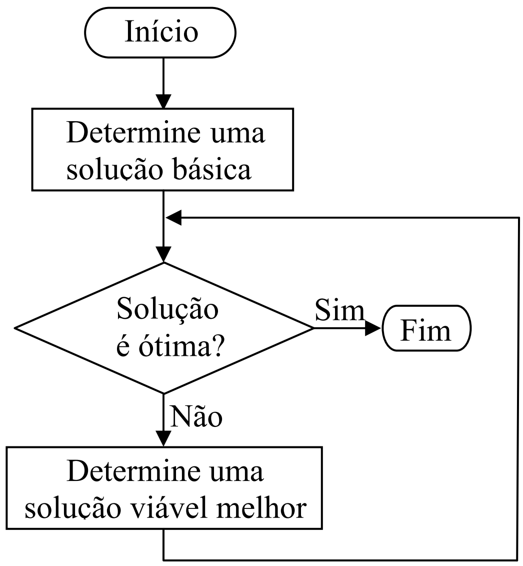
Saiba mais

A solução ótima pode não existir em dois casos:

- quando não há nenhuma solução viável para o problema, devido a restrições incompatíveis;
- quando não há máximo (ou mínimo), isto é, uma ou mais variáveis podem tender a infinito e as restrições podem continuar sendo satisfeitas, o que fornece indefinidamente um valor para a função objetivo.

Para chegar a esse objetivo, o problema deve apresentar uma solução básica inicial. As soluções básicas subsequentes são calculadas trocando as variáveis básicas por não básicas, gerando novas soluções. Os critérios para a escolha de vetores e, consequentemente, das variáveis que entram e saem para a formação da nova base constituem o centro do simplex.

O algoritmo do método simplex é apresentado no fluxograma a seguir:



Atenção

O método gráfico facilita a visualização do método simplex, mas somente nos casos bidimensional e tridimensional.

Inicialmente, vamos estudar os problemas de PL na forma padrão, com as seguintes características para o sistema linear de equações:

a) todas as variáveis são não negativas;
b) todos os b_i são não negativos;
c) todas as inequações iniciais do sistema são do tipo $\leq$.

4.1 Passos do Método Simplex (Problemas de Maximização)

Passo 1: escrever a função objetivo transformada e introduzir as variáveis de folga, uma para cada desigualdade.

Passo 2: montar um quadro para os cálculos, colocando os coeficientes de todas as variáveis com os respectivos sinais, e, na última linha, incluir os coeficientes da função objetivo transformada.

Passo 3: estabelecer uma solução básica inicial, usualmente atribuindo valor zero às variáveis originais e achando valores positivos para as variáveis de folga.

Passo 4: verificar se a solução atual é ótima. Se todas as variáveis que estão fora da base tiverem coeficientes nulos ou positivos na última linha (Z), a solução atual será ótima. Se alguma dessas variáveis tiver coeficiente nulo, isso significa que ela poderá ser introduzida na base sem aumentar o valor da função objetivo, ou seja, temos uma solução ótima, com o mesmo valor da função objetivo. Se for ótima, **pare**. Caso contrário, siga para o passo 5.

Passo 5: determinar a variável não básica que deve entrar na base. Como próxima variável a entrar na base, escolher a variável não básica que oferece, na última linha, a maior contribuição para o aumento da função objetivo (ou seja, tem o maior valor negativo).

Passo 6: determinar a variável básica que deve sair da base. Para escolher a variável que deve deixar a base, deve-se realizar o seguinte procedimento:

a) dividir os elementos da última coluna pelos correspondentes elementos positivos da coluna da variável que vai entrar na base. Caso não haja nenhum elemento positivo nessa coluna, o processo deve parar, uma vez que a solução seria ilimitada;

b) o menor quociente indica a equação cuja respectiva variável básica deverá ser anulada, tornando-se variável não básica.

Passo 7: atualizar o sistema usando operações válidas com as linhas da matriz e transformar o quadro de cálculos, de forma a encontrar a nova solução básica. A coluna da nova variável básica deverá se tornar um vetor identidade, em que o elemento 1 aparece na linha correspondente à variável que está sendo anulada.

Passo 8: Retornar ao passo 4 para iniciar outra iteração.

4.2 Exercício Resolvido

1. Resolva o problema pelo método simplex:

Maximizar: $Z = x_1 + x_2$

Sujeito a:

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 \; e \; x_2 \geq 0$$

Resolução:

Passo 1:

A função objetivo é:

$$Z = x_1 + x_2$$

A função objetivo transformada é:

$$Z - x_1 - x_2 = 0$$

Vamos chamar x_{F_1} a variável de folga da primeira restrição, x_{F_2} a variável de folga da segunda restrição e x_{F_3} a variável de folga da terceira restrição. Incluindo essas variáveis, uma em cada restrição, as inequações passam a ser as seguintes equações:

$$2x_1 + x_2 + x_{F_1} = 8$$

$$x_1 + 2x_2 + x_{F_2} = 7$$

$$x_2 + x_{F_3} = 3$$

$$x_1,\, x_2,\, x_{F_1},\, x_{F_2} \; e \; x_{F_3} \geq 0$$

Passo 2: montar a tabela para os cálculos.

Colocar os coeficientes de cada equação e, na última linha, os coeficientes da função objetivo transformada.

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_{F_1}	2	1	1	0	0	8	
x_{F_2}	1	2	0	1	0	7	
x_{F_3}	0	1	0	0	1	3	
Z	-1	-1	0	0	0	0	

Atenção

As variáveis básicas, na tabela inicial, são as variáveis de folga.

Passo 3: como fazer a leitura e interpretação da solução associada à tabela.

Cada variável básica aparece na primeira coluna e o seu valor atual aparece na mesma linha na coluna b_i. Nesse caso, temos $x_{F_1} = 8$, $x_{F_2} = 7$ e $x_{F_3} = 3$. As variáveis x_1 e x_2 que não aparecem na primeira coluna têm o valor atual igual a zero. Portanto, a solução óbvia inicial é $X = [0 \quad 0 \quad 8 \quad 7 \quad 3]^t$ e $Z = 0$.

Passo 4: verificar se a solução atual é ótima.

Observando o sinal dos coeficientes das variáveis de x_1 até x_{F_3}, na última linha (Z), temos $x_1 = -1$ e $x_2 = -1$, que são negativos, ou seja, a solução ótima ainda não foi atingida.

Passo 5: determinar a variável não básica que deve entrar na base.

A variável que deve entrar na base é aquela que tem o maior valor negativo no passo 4. Nesse caso, como as duas variáveis têm o mesmo valor, podemos escolher qualquer uma delas, arbitrariamente. Desse modo, vamos escolher x_1.

Saiba mais

A coluna da variável que vai entrar na base é denominada coluna **pivô**.

Dicionário

Pivô: agente principal em torno do qual se alicerçam todos os cálculos.

Passo 6: determinar a variável básica que deve sair da base.

Inicialmente, vamos efetuar o item a do passo 6, que é dividir os elementos da última coluna pelos correspondentes elementos positivos da coluna da variável que vai entrar na base e completar a tabela.

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_{F_1}	2	1	1	0	0	8	$\frac{8}{2}=4$
x_{F_2}	1	2	0	1	0	7	$\frac{7}{1}=7$
x_{F_3}	0	1	0	0	1	3	$\frac{3}{0}=\nexists$
Z	-1	-1	0	0	0	0	

De acordo com o item b do passo 6, o menor quociente ocorreu na primeira linha, indicando a variável que deve sair da base: x_{F_1}. Essa linha é denominada linha pivô e o coeficiente que se encontra na interseção da coluna e da linha pivô é chamado número pivô ou, simplesmente, pivô.

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_{F_1}	2	1	1	0	0	8	$\frac{8}{2}=4$
x_{F_2}	1	2	0	1	0	7	$\frac{7}{1}=7$
x_{F_3}	0	1	0	0	1	3	$\frac{3}{0}=\nexists$
Z	-1	-1	0	0	0	0	

Passo 7: atualizar o sistema usando operações válidas com as linhas da matriz.

Vamos substituir a variável básica que sai pela que entra, calcular nova linha pivô e montar outra tabela.

Atenção

$$[Nova\ linha\ pivô] = \frac{Linha\ pivô\ anterior}{Número\ pivô}$$

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4	
x_{F_2}							
x_{F_3}							
Z							

Para fazer a transformação das outras linhas, vamos utilizar o método de Gauss, aplicado na resolução de sistemas lineares.

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_{F_1}	2	1	1	0	0	8	$\frac{8}{2} = 4$
x_{F_2}	1	2	0	1	0	7	$\frac{7}{1} = 7$
x_{F_3}	0	1	0	0	1	3	$\frac{3}{0} = \nexists$
Z	-1	-1	0	0	0	0	

Para fazer a transformação da linha 2, primeiramente, vamos determinar o multiplicador:

$$[multiplicador] = -\frac{número\ da\ linha2\ da\ coluna\ pivô}{novo\ pivô}$$

Portanto, $multiplicador = -\frac{1}{1} = -1$. Em seguida, vamos calcular a nova linha 2 transformada:

$$[nova\ linha\ 2] = multiplicador\ x\ linha\ do\ novo\ pivô + linha\ 2\ anterior.$$

Desse modo, os novos valores serão:

$$x_1 = -1 \cdot 1 + 1 = 0$$

$$x_2 = -1 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 1{,}5$$

$$x_{F_1} = -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 = -0{,}5$$

$$x_{F_2} = -1 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$x_{F_3} = -1 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$b_i = -1 \cdot 4 + 7 = 3$$

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4	
x_{F_2}	0	1,5	-0,5	1	0	3	
x_{F_3}							
Z							

Para fazer a transformação da linha 3, primeiramente, vamos determinar o multiplicador:

$$[multiplicador] = -\frac{número\ da\ linha 3\ da\ coluna\ pivô}{novo\ pivô}$$

Portanto, $multiplicador = -\frac{0}{1} = 0$. Em seguida, vamos calcular a nova linha 3 transformada:

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_{F_1}	2	1	1	0	0	8	$\frac{8}{2} = 4$
x_{F_2}	1	2	0	1	0	7	$\frac{7}{1} = 7$
x_{F_3}	0	1	0	0	1	3	$\frac{3}{0} = \nexists$
Z	-1	-1	0	0	0	0	

$$[nova\ linha\ 3] = multiplicador\ x\ linha\ do\ novo\ pivô + linha\ 3\ anterior$$

Desse modo, os novos valores serão:

$$x_1 = 0 \cdot 1 + 0 = 0$$

$$x_2 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1$$

$$x_{F_1} = 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 0$$

$$x_{F_2} = 0 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$x_{F_3} = 0 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$b_i = 0 \cdot 4 + 3 = 3$$

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4	
x_{F_2}	0	1,5	-0,5	1	0	3	
x_{F_3}	0	1	0	0	1	3	
Z							

Para fazer a transformação da linha 4, primeiramente, vamos determinar o multiplicador:

$$[multiplicador] = -\frac{número\ da\ linha 4\ da\ coluna\ pivô}{novo\ pivô}$$

Portanto, $multiplicador = -\frac{(-1)}{1} = 1$. Em seguida, vamos calcular a nova linha 4 transformada:

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_{F_1}	2	1	1	0	0	8	$\frac{8}{2} = 4$
x_{F_2}	1	2	0	1	0	7	$\frac{7}{1} = 7$
x_{F_3}	0	1	0	0	1	3	$\frac{3}{0} = \nexists$
Z	-1	-1	0	0	0	0	

$$[nova\ linha\ 4] = multiplicador\ x\ linha\ do\ novo\ pivô + linha\ 4\ anterior$$

Desse modo, os novos valores serão:

$$x_1 = 1 \cdot 1 + (-1) = 0$$

$$x_2 = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) = -0{,}5$$

$$x_{F_1} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 0{,}5$$

$$x_{F_2} = 1 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$x_{F_3} = 1 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$b_i = 1 \cdot 4 + 0 = 4$$

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4	
x_{F_2}	0	1,5	-0,5	1	0	3	
x_{F_3}	0	1	0	0	1	3	
Z	0	-0,5	0,5	0	0	4	

Passo 8: retornar ao passo 4 para iniciar outra iteração.

Passo 4: verificar se a solução atual é ótima.

Observando o sinal dos coeficientes das variáveis de x_1 até x_{F_3}, na última linha (Z), temos $x_2 = -0{,}5$, que é negativo, ou seja, a solução ótima ainda não foi atingida.

Passo 5: determinar a variável não básica que deve entrar na base.

A variável que deve entrar na base é aquela que tem o maior valor negativo no passo 4. Nesse caso, como há somente uma variável negativa, ela será a escolhida; desse modo, vamos escolher x_2. A coluna da variável que vai entrar na base será a coluna pivô.

Passo 6: determinar a variável básica que deve sair da base.

Inicialmente, vamos efetuar o item a do passo 6, que é dividir os elementos da última coluna pelos correspondentes elementos positivos da coluna pivô e completar a tabela.

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4	$\frac{4}{0{,}5} = 8$
x_{F_2}	0	1,5	-0,5	1	0	3	$\frac{3}{1{,}5} = 2$
x_{F_3}	0	1	0	0	1	3	$\frac{3}{1} = 3$
Z	0	-0,5	0,5	0	0	4	

De acordo com o item b do passo 6, o menor quociente ocorreu na segunda linha, indicando a variável que deve sair da base: x_{F_2}. Esta será a linha pivô e o número pivô será 1,5.

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4	$\frac{4}{0,5} = 8$
x_{F_2}	0	1,5	-0,5	1	0	3	$\frac{3}{1,5} = 2$
x_{F_3}	0	1	0	0	1	3	$\frac{3}{1} = 3$
Z	0	-0,5	0,5	0	0	4	

Passo 7: atualizar o sistema usando operações válidas com as linhas da matriz.

Vamos substituir a variável básica que sai pela que entra, calcular nova linha pivô e montar outra tabela.

$$[Nova\ linha\ pivô] = \frac{Linha\ pivô\ anterior}{Número\ pivô}$$

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_1							
x_2	0	1	$\frac{-0,5}{1,5}$	$\frac{1}{1,5}$	0	2	
x_{F_3}							
Z							

Vamos fazer a transformação das outras linhas utilizando o método de Gauss novamente.

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4	$\frac{4}{0,5} = 8$
x_{F_2}	0	1,5	-0,5	1	0	3	$\frac{3}{1,5} = 2$
x_{F_3}	0	1	0	0	1	3	$\frac{3}{1} = 3$
Z	0	-0,5	0,5	0	0	4	

Para fazer a transformação da linha 1, primeiramente, vamos determinar o multiplicador:

$$[multiplicador] = -\frac{número\ da\ linha 1\ da\ coluna\ pivô}{novo\ pivô}$$

Portanto, $multiplicador = -\frac{0,5}{1} = -0,5$. Em seguida, vamos calcular a nova linha 1 transformada:

$$[nova\ linha\ 1] = multiplicador\ x\ linha\ do\ novo\ pivô + linha\ 1\ anterior$$

Desse modo, os novos valores serão:

$$x_1 = -0,5 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$x_2 = -0,5 \cdot 1 + \frac{1}{2} = 0$$

$$x_{F_1} = -0,5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$x_{F_2} = -0,5 \cdot \frac{1}{1,5} + 0 = -\frac{1}{3}$$

$$x_{F_3} = -0,5 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$b_i = -0,5 \cdot 2 + 4 = 3$$

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	3	
x_2	0	1	$\frac{-0,5}{1,5}$	$\frac{1}{1,5}$	0	2	
x_{F_3}							
Z							

Para fazer a transformação da linha 3, primeiramente, vamos determinar o multiplicador:

$$[multiplicador] = -\frac{número\ da\ linha 3\ da\ coluna\ pivô}{novo\ pivô}$$

Portanto, $multiplicador = -\frac{1}{1} = -1$. Em seguida, vamos calcular a nova linha 3 transformada.

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4	$\frac{4}{0,5} = 8$
x_{F_2}	0	1,5	-0,5	1	0	3	$\frac{3}{1,5} = 2$
x_{F_3}	0	1	0	0	1	3	$\frac{3}{1} = 3$
Z	0	-0,5	0,5	0	0	4	

$$[nova\ linha\ 3] = multiplicador\ x\ linha\ do\ novo\ pivô + linha\ 3\ anterior$$

Desse modo, os novos valores serão:

$$x_1 = -1 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$x_2 = -1 \cdot 1 + 1 = 0$$

$$x_{F_1} = -1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 0 = \frac{1}{3}$$

$$x_{F_2} = -1 \cdot \frac{2}{3} + 0 = -\frac{2}{3}$$

$$x_{F_3} = -1 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$b_i = -1 \cdot 2 + 3 = 1$$

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	3	
x_2	0	1	$\frac{-0,5}{1,5}$	$\frac{1}{1,5}$	0	2	
x_{F_3}	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	1	
Z							

Para fazer a transformação da linha 4, primeiramente, vamos determinar o multiplicador:

$$[multiplicador] = -\frac{número\ da\ linha4\ da\ coluna\ pivô}{novo\ pivô}$$

Portanto, $multiplicador = -\frac{(-0,5)}{1} = 0,5$. Em seguida, vamos calcular a nova linha 4 transformada.

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4	$\frac{4}{0,5} = 8$
x_{F_2}	0	1,5	-0,5	1	0	3	$\frac{3}{1,5} = 2$
x_{F_3}	0	1	0	0	1	3	$\frac{3}{1} = 3$
Z	0	-0,5	0,5	0	0	4	

$$[nova\ linha\ 4] = multiplicador\ x\ linha\ do\ novo\ pivô + linha\ 4\ anterior$$

Desse modo, os novos valores serão:

$$x_1 = 0,5 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$x_2 = 0,5 \cdot 1 + (-0,5) = 0$$

$$x_{F_1} = 0,5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 0,5 = \frac{1}{3}$$

$$x_{F_2} = 0,5 \cdot \frac{2}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

$$x_{F_3} = 0,5 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$b_i = 0,5 \cdot 2 + 4 = 5$$

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	3	
x_2	0	1	$\frac{-0,5}{1,5}$	$\frac{1}{1,5}$	0	2	
x_{F_3}	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	1	
Z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	5	

Passo 8: retornar ao passo 4 para iniciar outra iteração.

Passo 4: verificar se a solução atual é ótima.

Observando o sinal dos coeficientes das variáveis de x_1 até x_{F_3}, na última linha (Z), temos todos os coeficientes não negativos (zero ou positivos); isso significa que atingimos a solução ótima para o problema.

Portanto, a solução ótima é dada por $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_{F_1} = 0$, $x_{F_2} = 0$, $x_{F_3} = 1$ e $Z = 5$, ou seja, o vetor solução é $X = \binom{x_1}{x_2} = \binom{3}{2}$.

4.3 Resumo do Capítulo

Caro(a) aluno(a),

Agora, você é capaz de determinar a solução de um problema de PL utilizando o método simplex.

Neste capítulo, você aprendeu a definir as variáveis de folga e a montar as equações necessárias para a resolução utilizando o método simplex. Você deve lembrar-se dos passos que compreendem esse método.

4.4 Atividades Propostas

1. Resolva, pelo método simplex, o seguinte problema: uma empresa de comida canina produz dois tipos de ração: Tobi e Rex. Para a manufatura das rações, são utilizados cereais e carne. Sabe-se que:

   - a ração Tobi utiliza 5 kg de cereais e 1 kg de carne e a ração Rex utiliza 4 kg de carne e 2 kg de cereais;
   - o pacote de ração Tobi custa \$ 20 e o pacote de ração Rex custa \$ 30;
   - o quilo de carne custa \$ 4 e o quilo de cereais custa \$ 1;
   - estão disponíveis por mês 10.000 kg de carne e 30.000 kg de cereais.

   Deseja-se saber a quantidade de cada ração a produzir, de modo a maximizar o lucro.

2. Resolva, pelo método simplex, o modelo de PL a seguir:

Maximizar: $Z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeito a:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 10$$
$$6x_1 + x_2 \leq 20$$
$$x_1 - x_2 \leq 30$$
$$x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0$$

5 FERRAMENTA *SOLVER* DO EXCEL

Caro(a) aluno(a),

Chegamos a um ponto do curso em que é necessário que você esteja familiarizado(a) com a utilização do computador, mais especificamente, da planilha Excel da Microsoft, por ser a mais popular no Brasil. Acreditamos que você tenha conhecimento básico de operação de uma planilha Excel. Estamos certos?

Atualmente, já foram desenvolvidas diversas ferramentas para solução de problemas de otimização, para fins comerciais ou acadêmicos, sejam eles de PL ou programação não linear. Deste ponto em diante, nossa atenção irá se concentrar na modelagem de problemas e na análise de suas respostas, deixando os *softwares* disponíveis no mercado nos auxiliar na tarefa dos cálculos.

Um *software* muito popular, que é específico para a resolução de problemas de PL, é o LINDO, da Lindo Systems. O *site* da empresa (http://www.lindo.com) disponibiliza uma versão *trial*, que pode ser obtida via *download* da página da Lindo Systems e do suplemento para o Excel chamado *What's Best*, que substitui a ferramenta ***Solver*** do *software* e possibilita a resolução de problemas de maior porte.

Dicionário

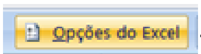
Solver: suplemento da planilha Excel do pacote Microsoft Office.

As planilhas eletrônicas vêm ganhando cada vez mais adeptos, pois, além da facilidade de utilização, estão presentes em praticamente todas as empresas modernas. Entre as planilhas, a mais popular é o Excel da Microsoft, que vem acompanhado da ferramenta *Solver*.

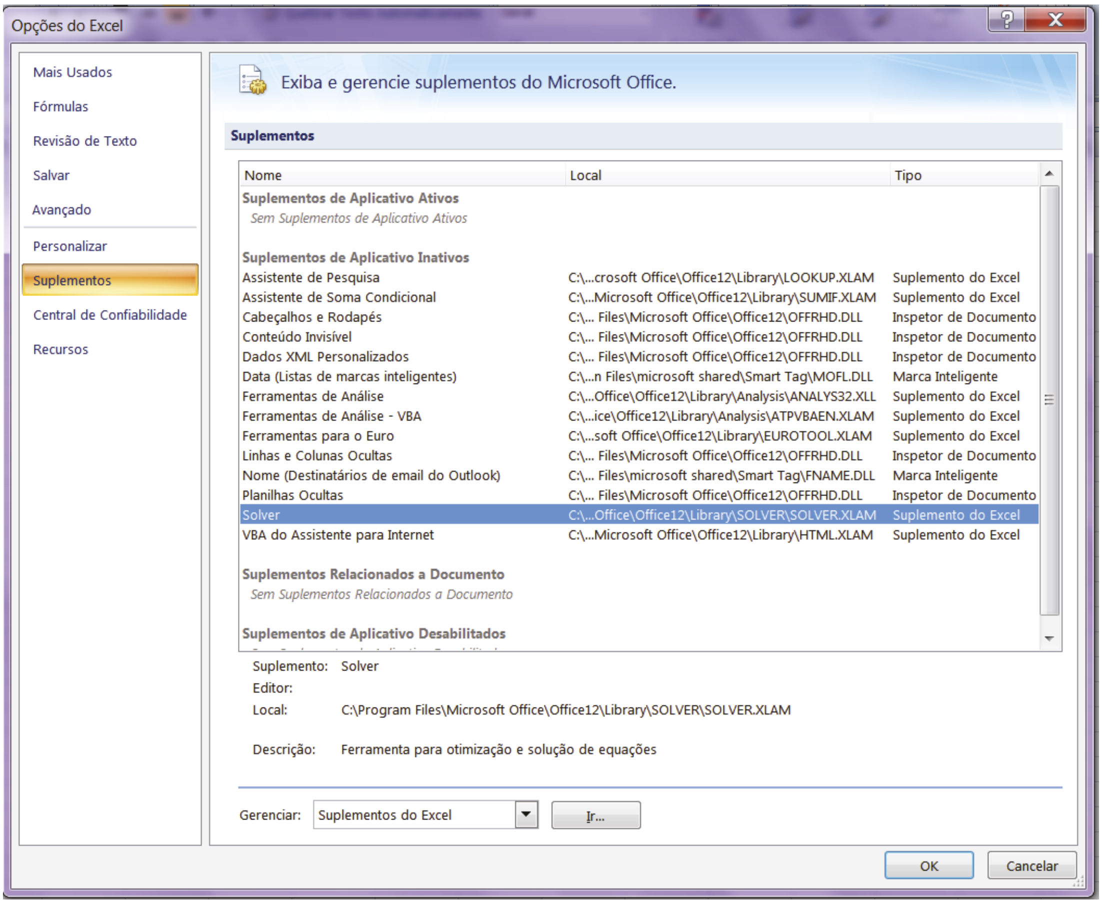
Neste curso, será utilizada a versão que acompanha o pacote Office 2007, Microsoft Office Excel 2007, exclusivamente para a solução de problemas de PL.

5.1 Verificando a Instalação do *Solver*

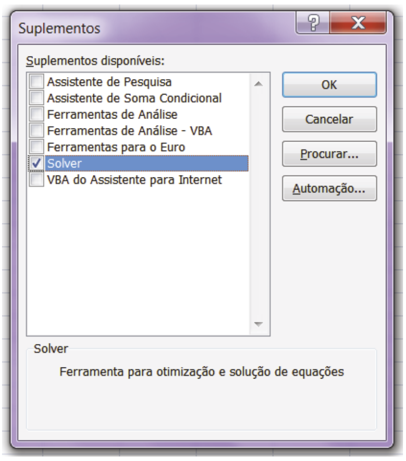
Você está ansioso(a) para resolver um problema utilizando o *Solver*? Vamos verificar se ele está instalado no computador.

Abra a planilha Excel. Clique no botão Microsoft Office  e, em seguida, clique na caixa Opções do Excel 

. Na caixa de diálogo Opções do Excel, na coluna da esquerda, clique em Suplementos. Irá abrir no lado direito a caixa Suplementos e, se o *Solver* estiver instalado, irá aparecer na lista. Ele pode estar Ativo ou Inativo. Se estiver listado em Suplementos de Aplicativo Ativos, você já está pronto(a) para começar a utilizá-lo.

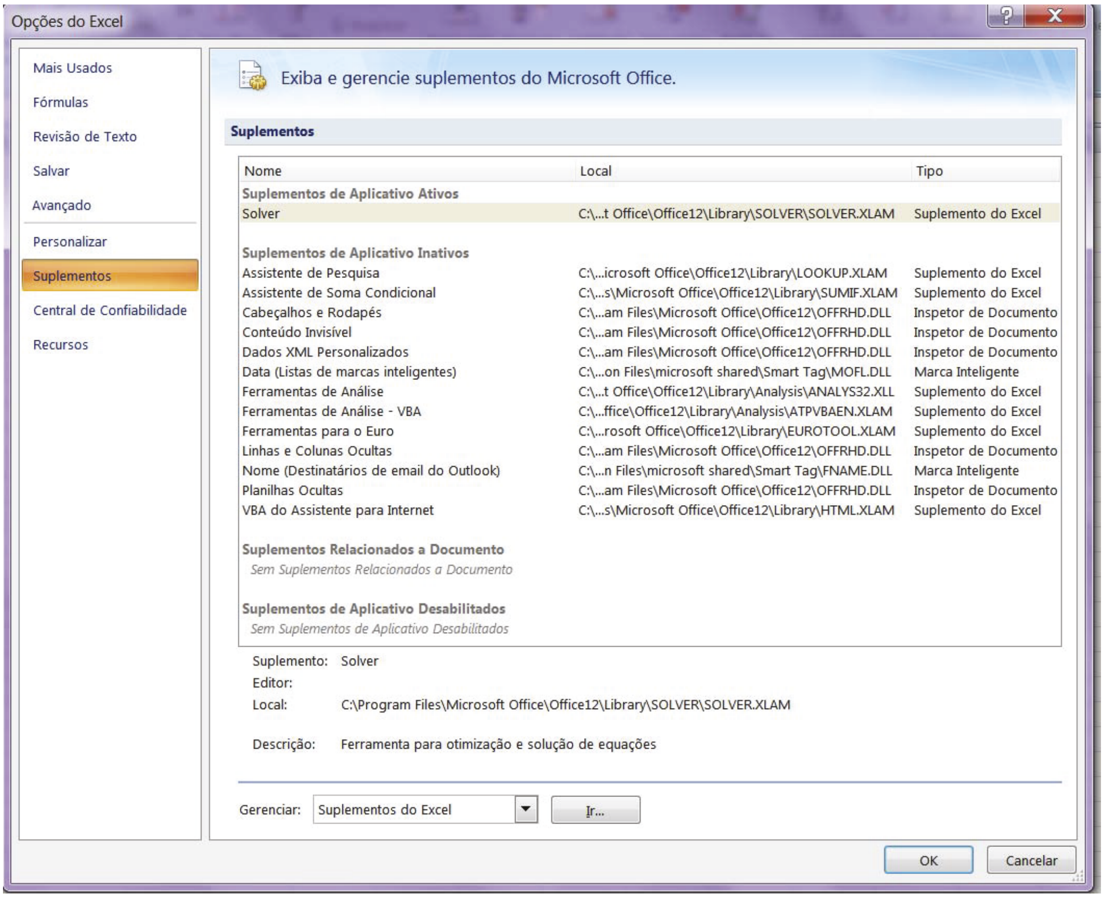


Se ele estiver listado em Suplementos de Aplicativo Inativos, clique no botão Ir..., que irá abrir a caixa de diálogo a seguir:



Selecione *Solver* e, em seguida, clique no botão OK.

Volte para a caixa de diálogo Opções do Excel, em Suplementos, e observe que ele irá aparecer em Suplementos de Aplicativo Ativos.



Depois de ativar o *Solver*, o comando *Solver* torna-se disponível no grupo Análise, na guia Dados.

Saiba mais

O *Solver* é uma ferramenta de teste de hipótese que encontra o valor ideal de uma célula de destino alterando os valores nas células usadas para o cálculo da célula de destino.

5.2 Exercício Resolvido

Agora que o *Solver* está instalado no computador, está preparado(a) para "colocar a mão na massa" e resolver um problema utilizando-o?

1. Certa empresa fabrica dois produtos: P1 e P2. O lucro por unidade de P1 é de 100 reais e o lucro unitário de P2 é de 150 reais. A empresa necessita de 2 horas para fabricar uma unidade de P1 e 3 horas para fabricar uma unidade de P2. O tempo mensal disponível para essas atividades é de 120 horas. As demandas esperadas para os dois produtos levaram a empresa a decidir que os montantes produzidos de P1 e P2 não devem ultrapassar 40 unidades de P1 e 30 unidades de P2 por mês. Construa e resolva o modelo do sistema de produção mensal, com o objetivo de maximizar o lucro da empresa.

Resolução:

Vamos montar a função objetivo e as inequações de restrições.

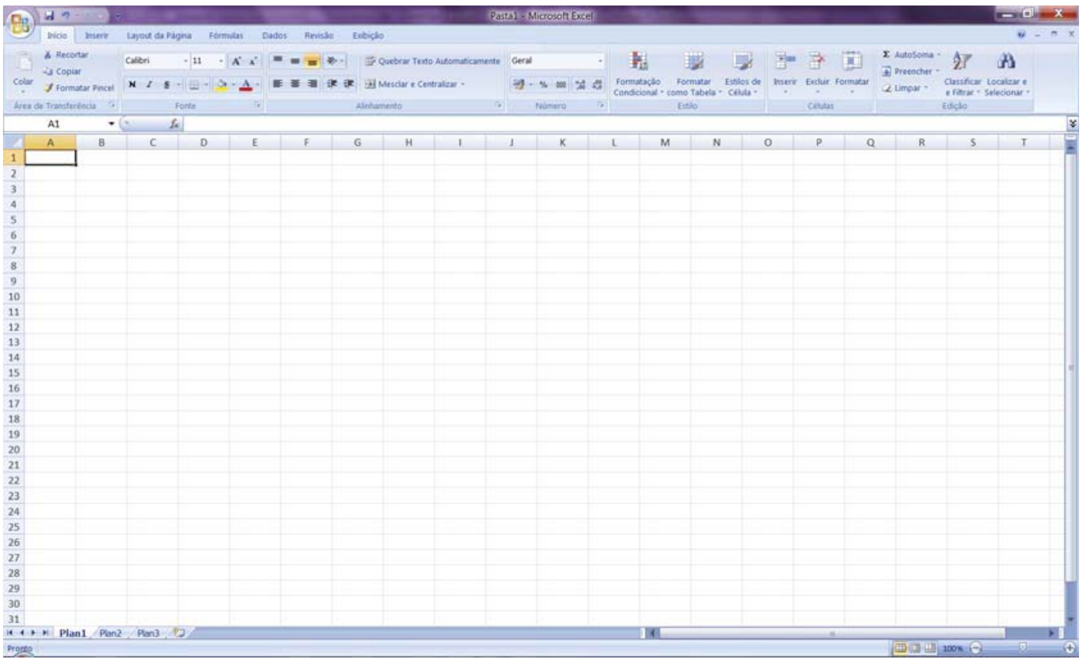
Função objetivo:

Maximizar: $Z = 100P_1 + 150P_2$

Sujeito a:

$$2P_1 + 3P_2 \leq 120$$
$$P_1 \leq 40$$
$$P_2 \leq 30$$
$$P_1 \geq 0$$
$$P_2 \geq 0$$

O próximo passo é colocar esses dados em uma planilha. Abra um novo arquivo no Microsoft Excel.



Iremos trabalhar não somente com as fórmulas, mas colocaremos alguns textos nas células, para facilitar a identificação e a interpretação dos resultados obtidos.

Atenção

Célula é a interseção entre uma coluna e uma linha na planilha Excel, identificada ou localizada por meio de uma letra em maiúsculo do alfabeto, que representa a referida coluna, e um número, que representa a referida linha. Por exemplo, C5 indica que é a célula que se encontra na coluna C e na linha 5.

Vamos colocar a definição do problema na planilha; para isso, devemos definir células para representar as variáveis de decisão e uma célula para representar o valor da função objetivo. As restrições também devem ser definidas, cada uma em uma célula. Siga estes passos:

- na célula A1, digite P1;
- na célula A2, digite P2; estes são os nomes das variáveis, para facilitar a sua identificação;
- na célula B1, digite o valor zero;
- na célula B2, digite o valor zero.

As células B1 e B2 guardarão os valores das variáveis de decisão P1 e P2, respectivamente.

	A	B	C
1	P1	0	
2	P2	0	
3			

Vamos, agora, definir a função objetivo. As equações no Excel são sempre precedidas do sinal de igualdade (=), que indica tratar-se de uma fórmula. Preencha as células da planilha conforme indicado a seguir:

- na célula A4, digite Função objetivo;
- na célula B4, digite a equação da função objetivo =100*B1+150*B2.

	A	B	C
1	P1	0	
2	P2	0	
3			
4	Função Ob	=100*B1+150*B2	
5			

Quando teclar *Enter* após digitar a equação, na célula B4 será calculado automaticamente o valor da função objetivo, a partir da função fornecida, que, no caso, é zero.

	A	B	C
1	P1	0	
2	P2	0	
3			
4	Função Ob	0	
5			
6			

Agora, devemos digitar as restrições do problema. As células de restrição devem ser preenchidas da seguinte maneira:

- na célula A6, digite Restrições;
- na célula B6, digite = 2*B1+3*B2;
- na célula C6, digite <=;
- na célula D6, digite 120;
- na célula B7, digite =B1;
- na célula C7, digite <=;
- na célula D7, digite 40;
- na célula B8, digite =B2;
- na célula C8, digite <=;
- na célula D8, digite 30;
- na célula B9, digite =B1;

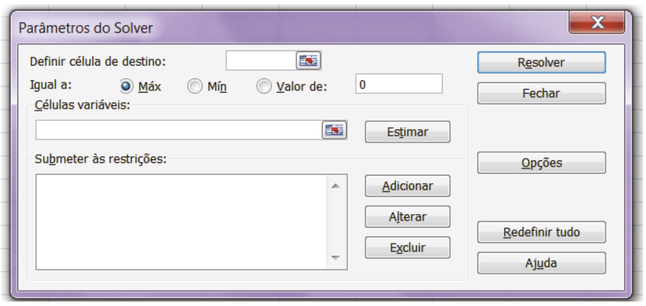
- na célula C9, digite >=;
- na célula D9, digite 0;
- na célula B10, digite =B2;
- na célula C10, digite >=;
- na célula D10, digite 0.

Após preenchidas as células, aplique o autoajuste da largura da coluna para as colunas A e C. A planilha deve estar semelhante à apresentada, lembrando o formato no início da resolução, quando montamos a função objetivo e as restrições.

	A	B	C	D	E
1	P1	0			
2	P2	0			
3					
4	Função Objetivo	0			
5					
6	Restrições	0	<=	120	
7		0	<=	40	
8		0	<=	30	
9		0	>=	0	
10		0	>=	0	
11					

Agora, vamos utilizar a ferramenta *Solver* para otimizar a função objetivo. Clique no *menu* Dados:

Em seguida, clique em *Solver*  . A caixa de diálogo Parâmetros do *Solver* irá abrir.

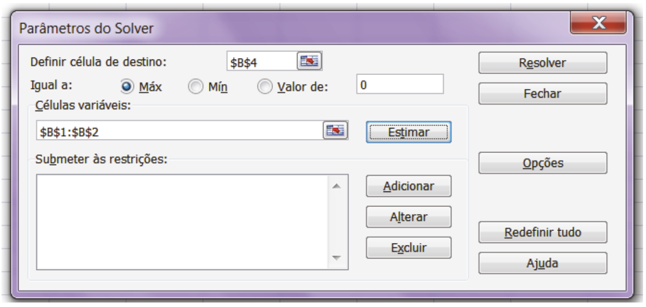


Na caixa Definir célula de destino, selecione a célula da função objetivo (B4) clicando sobre ela ou, simplesmente, digitando B4.

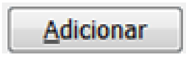
Logo abaixo, é requerido que se escolha entre três opções: Máx, para maximizar a função objetivo; Mín, para minimizar a função objetivo; e Valor, que faz com que a função objetivo tenha determinado valor. É adotado como padrão Máx; como queremos maximizar a função objetivo, não precisamos escolher.

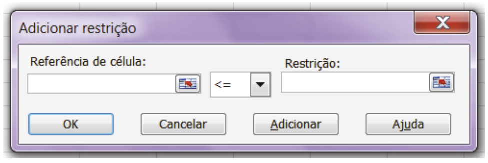
Na caixa Células variáveis, devem ser inseridas as células ajustáveis, que contêm o valor das variáveis de decisão. Deve-se inserir um nome ou uma referência para cada célula ajustável, separando as células não adjacentes por ponto e vírgula. Para que o *Solver* proponha automaticamente as células ajustáveis com base na célula de destino, clique em Estimar  .

As células ajustáveis devem estar relacionadas direta ou indiretamente com a célula que contém o valor da função objetivo. Podem ser especificadas até 200 células ajustáveis.

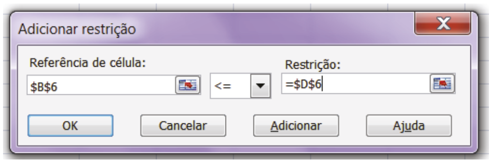


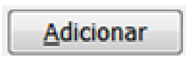
As restrições do problema devem ser inseridas na caixa Submeter às restrições. Para inserir as restrições, siga estes passos:

- clique no botão Adicionar  . Irá abrir a caixa de diálogo Adicionar restrição;



- na caixa Referência de célula, selecione a célula contendo a primeira restrição (B6), clicando nela;
- na caixa de seleção ao lado, escolha a opção que corresponde ao tipo de restrição, que pode ser menor ou igual (<=), maior ou igual (>=), igual (=), valor inteiro (núm) ou valor binário (bin). No nosso caso, a restrição é <=, que deve ser a opção a ser escolhida;
- na caixa Restrição, defina a célula que contém o valor limite da restrição (D6), clicando na célula;



- como temos mais restrições a ser adicionadas, clique no botão Adicionar . Irá a abrir novamente a caixa de diálogo Adicionar  restrição;

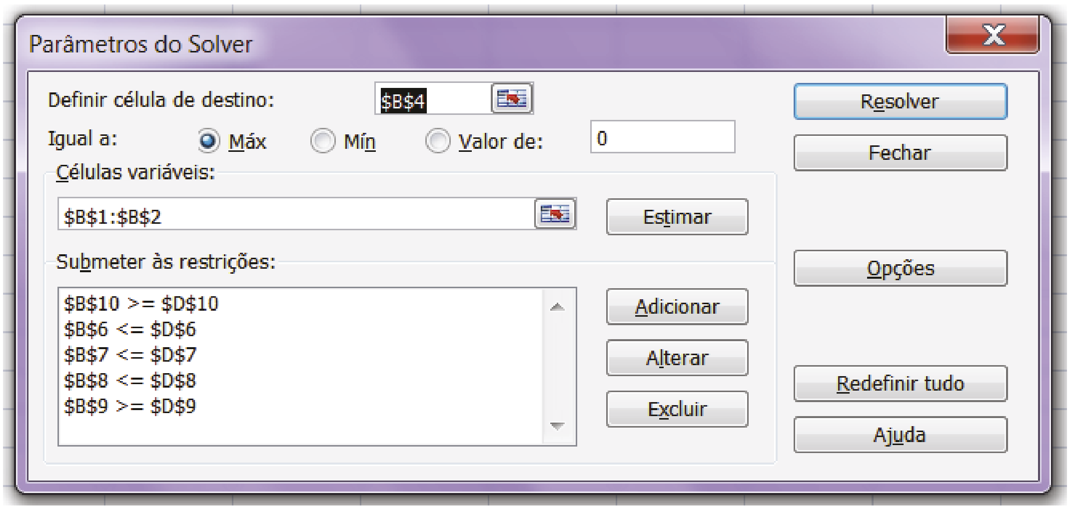
- repita os passos até que todas as restrições estejam adicionadas. Quando adicionar a última restrição, clique no botão 

, em vez do botão Adicionar;

Atenção

Cuidado ao escolher o tipo das duas últimas restrições, que são do tipo >=.

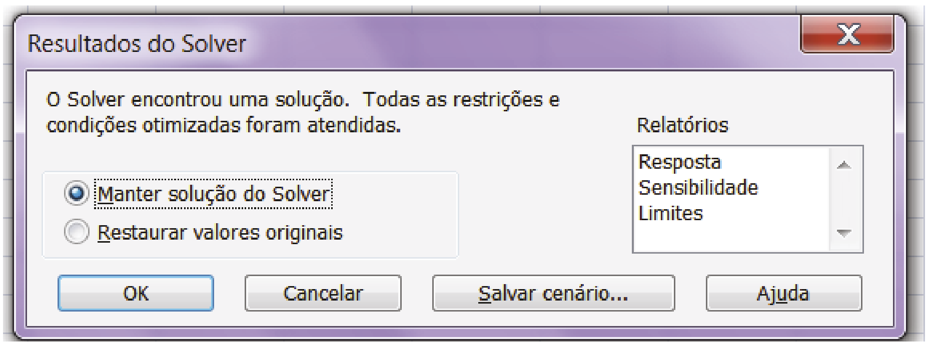
- após serem adicionadas as restrições, a janela deve apresentar as restrições como aparece na figura:



Antes de resolver o problema, confira se todas as restrições estão corretas, ou seja, as células referenciadas e os tipos de restrição estão coerentes.

Para resolver o problema, clique no botão Resolver 

. Se tudo estiver correto, o *Solver* irá mostrar a caixa de diálogo Resultados do *Solver*.



Nessa janela, podemos escolher entre manter a solução encontrada pelo *Solver* e restaurar os valores originais. Também podemos selecionar relatórios, que contêm informações sobre o processo de solução do problema.

Clique no botão 

para retornar à planilha e conferir os resultados obtidos.

	A	B	C	D	E
1	P1	18,46154			
2	P2	27,69231			
3					
4	Função Objetivo	6000			
5					
6	Restrições	120	<=	120	
7		18,46154	<=	40	
8		27,69231	<=	30	
9		18,46154	>=	0	
10		27,69231	>=	0	
11					

5.3 Resumo do Capítulo

Caro(a) aluno(a),

Neste capítulo, você aprendeu a colocar os dados de um problema de PL na planilha, bem como definir os parâmetros no *Solver*. Agora, você é capaz de determinar a solução de um problema de PL utilizando o *Solver*, que é um suplemento do Excel.

5.4 Atividades Propostas

1. Resolva, utilizando o *Solver*, o seguinte problema:

   Maximizar:
   $$Z = 3x_1 + 2x_2$$

   Sujeito a:
   $$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
   $$2x_1 + x_2 \leq 8$$
   $$-x_1 + x_2 \leq 1$$
   $$x_2 \leq 2$$
   $$x_1,\ x_2 \geq 0$$

2. Resolver, utilizando o *Solver*, o seguinte problema: uma fábrica de computadores produz dois modelos de computador: A e B. O modelo A fornece um lucro de R$ 180,00 e o B, de R$ 300,00. O modelo A requer, na sua produção, um gabinete pequeno e uma unidade de disco. O modelo B requer um gabinete grande e duas unidades de disco. Existem no estoque: 60 unidades de gabinete pequeno, 50 unidades de gabinete grande e 120 unidades de disco. Qual deve ser o esquema de produção que maximiza o lucro?

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Caro(a) aluno(a),

Espera-se que, com esta apostila, você se envolva na disciplina; entenda e consiga definir e conceituar a terminologia básica da pesquisa operacional, incluindo modelagem, otimização e cálculos iterativos, aplicações clássicas e práticas da pesquisa operacional; conheça e aplique as principais técnicas de PL; domine *softwares* que utilizam PL; aplique o método simplex na resolução do problema geral da PL; desenvolva o raciocínio lógico; e saiba utilizar e aplicar as equações pertinentes aos vários assuntos abordados e estudados na presente apostila no âmbito profissional e, consequentemente, na sociedade em que se encontra inserido(a).

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Caro(a) aluno(a),

A seguir, você poderá utilizar a resolução comentada das atividades propostas.

Faça uma revisão do texto escrito e refaça os exercícios resolvidos. Acreditamos que você vai conseguir resolver facilmente as atividades propostas.

Tenha em mãos uma calculadora científica para facilitar os cálculos e lápis, régua e papel milimetrado para facilitar a confecção dos gráficos.

Tente resolver os exercícios antes e, posteriormente, consulte a resolução.

CAPÍTULO 1

1. De acordo com o texto, temos como principais características da pesquisa operacional:
   - análise das operações de toda a organização;
   - otimização das operações;
   - aplicação de métodos e técnicas científicos;
   - desenvolvimento e utilização de modelos analíticos;
   - projeto e utilização de operações experimentais.

2. De acordo com o texto, algumas das técnicas utilizadas na pesquisa operacional são:
   - PL;
   - programação inteira;
   - programação mista;
   - programação não linear.

CAPÍTULO 2

1. De acordo com o texto, as fases envolvidas em um estudo de pesquisa operacional são:
   - definição do problema;
   - construção do modelo do sistema;
   - cálculo da solução por meio do modelo;
   - validação do modelo;
   - implementação do modelo.

2. De acordo com o texto, o objetivo geral de um problema de programação matemática é a busca por um ótimo, que pode ser um máximo ou o mínimo de uma função.

CAPÍTULO 3

1. A formulação do problema é a seguinte:

Maximizar:

$$Z = 5x_1 + 2x_2$$

Sujeito a:

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 \leq 6$$
$$x_2 \leq 5$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

2. O modelo é:

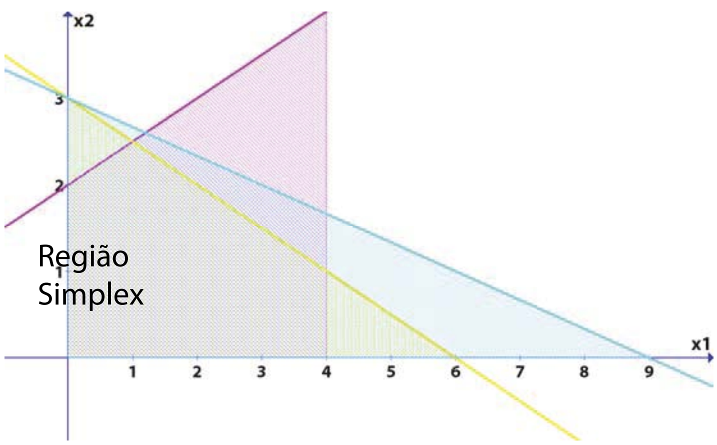
Maximizar:

$$Lucro = 2x_1 + 3x_2$$

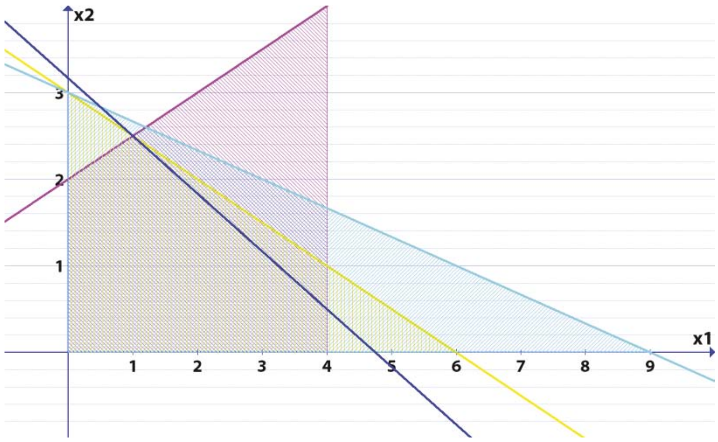
Sujeito a:

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Construindo o gráfico das restrições, temos:



Traçando a reta do lucro (azul), temos o gráfico a seguir, que fornece $x_1 = 1$ e $x_2 = 2,5$, com lucro = 9,5.



3. O modelo é:

Maximizar:

$$Z = 3x_1 + 4x_2$$

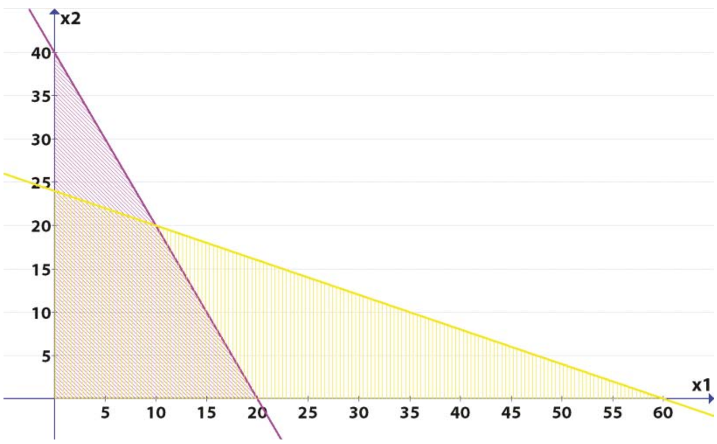
Sujeito a:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 80$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 120$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Construindo o gráfico das restrições, temos:



Traçando a reta do lucro (azul), temos o gráfico a seguir, que fornece $x_1 = 10$ e $x_2 = 20$, com lucro = 110.

CAPÍTULO 4

1. Precisamos calcular o custo de cada ração para determinar o seu lucro.

   Custo da ração Tobi:

$$custo\ T = 5 \cdot 1 + 4$$

$$custo\ T = R\$\ 9{,}00$$

   Custo da ração Rex:

$$custo\ R = 4 \cdot 4 + 2 \cdot 1$$

$$custo\ R = R\$\ 18{,}00$$

   Lucro:

   Ração Tobi:

$$Lucro\ T = 20{,}00 - \ 9{,}00$$

$$Lucro\ T = R\$\ 11{,}00$$

   Ração Rex:

$$Lucro\ R = 30{,}00 - \ 18{,}00$$

$$Lucro\ R = R\$\ 12{,}00$$

   O modelo é:

   Maximizar:

$$Z = 11x_1 + 12x_2$$

   Sujeito a:

$$x_1 + 4x_2 \leq 10000$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 30000$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

   Incluindo as variáveis de folga, temos:

$$x_1 + 4x_2 + x_{F_1} \leq 10000$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_{F_2} \leq 30000$$

$$x_1,\ x_2,\ x_{F_1}\ e\ x_{F_2} \geq 0$$

Montando a tabela para os cálculos, temos:

Variável básica (V_B)	Coeficientes de				Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}		
x_{F_1}	1	4	1	0	10000	$\frac{10000}{4} = 2500$
x_{F_2}	5	2	0	1	30000	$\frac{30000}{2} = 15000$
Z	-11	-12	0	0	0	

Após a primeira iteração, temos:

Variável básica (V_B)	Coeficientes de				Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}		
x_2	1/4	1	1/4	0	2500	$\frac{2500}{1/4} = 10000$
x_{F_2}	4,5	0	-1/2	1	25000	$\frac{25000}{4,5} = 5555,56$
Z	-8	0	3	0	30000	

Após a segunda iteração, temos:

Variável básica (V_B)	Coeficientes de				Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}		
x_2	0	1	0,2778	-0,0556	1111,11	
x_1	1	0	-0,1111	0,2222	5555,56	
Z	0	0	2,1111	1,7778	74444,44	

A segunda iteração fornece como solução ótima $x_1 = 5555{,}56$; $x_2 = 1111{,}11$; $x_{F_1} = 0$; $x_{F_2} = 0$; e $Z = 74444{,}44$.

2. Incluindo as variáveis de folga, temos:

   Maximizar:

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

   Sujeito a:

$$2x_1 + 4x_2 + x_{F_1} \leq 10$$

$$6x_1 + x_2 + x_{F_2} \leq 20$$

$$x_1 - x_2 + x_{F_3} \leq 30$$

$$x_1,\ x_2,\ x_{F_1},\ x_{F_2}\ e\ x_{F_3} \geq 0$$

   Montando a tabela para os cálculos, temos:

Variável básica (V_B)	Coeficientes de					Constante (b_i)	Divisão
	x_1	x_2	x_{F_1}	x_{F_2}	x_{F_3}		
x_{F_1}	2	4	1	0	0	10	$\frac{10}{4} = 2{,}5$
x_{F_2}	6	1	0	1	0	20	$\frac{20}{1} = 20$
x_{F_3}	1	-1	0	0	1	30	coeficiente negativo
Z	-3	-5	0	0	0	0	

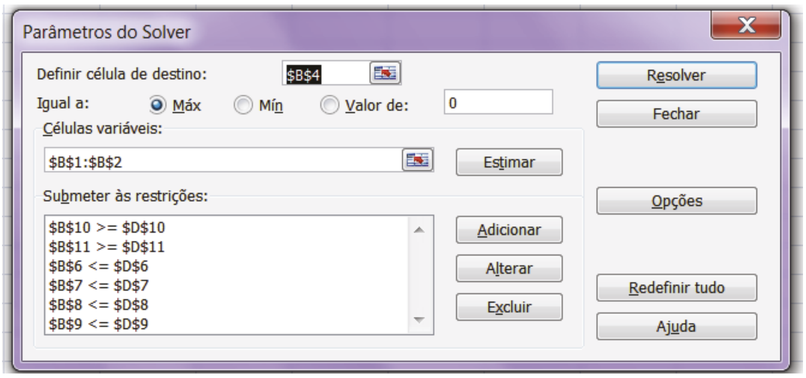
Após as iterações, temos como solução ótima: $x_1 = 3{,}1818$; $x_2 = 0{,}9090$; $x_{F_1} = 0$; $x_{F_2} = 0$; $x_{F_3} = 26$ e $Z = 14{,}09$.

CAPÍTULO 5

1. Colocando os dados na planilha, temos:

	A	B	C	D	E
1	x1	0			
2	x2	0			
3					
4	Função Objetivo	0			
5					
6	Restrições	0	<=	6	
7		0	<=	8	
8		0	<=	1	
9		0	<=	2	
10		0	>=	0	
11		0	>=	0	
12					

Aplicando o *Solver*, temos:



O resultado é:

	A	B	C	D	E
1	x1	3,333333			
2	x2	1,333333			
3					
4	Função Objetivo	12,66667			
5					
6	Restrições	6	<=	6	
7		8	<=	8	
8		-2	<=	1	
9		1,333333	<=	2	
10		3,333333	>=	0	
11		1,333333	>=	0	
12					

2. A formulação do problema é a seguinte:

Maximizar:

$$Z = 180x_1 + 300x_2$$

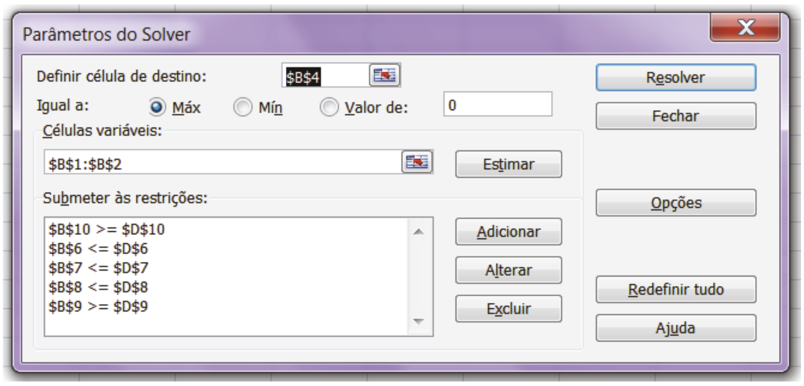
Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 \leq 120$$
$$x_1 \leq 60$$
$$x_2 \leq 50$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Colocando os dados na planilha, temos:

	A	B	C	D	E
1	x1	0			
2	x2	0			
3					
4	Função Objetivo	0			
5					
6	Restrições	0	<=	6	
7		0	<=	8	
8		0	<=	1	
9		0	<=	2	
10		0	>=	0	
11		0	>=	0	
12					

Aplicando o *Solver*, temos:



O resultado é:

	A	B	C	D	E
1	x1	60			
2	x2	30			
3					
4	Função Objetivo	19800			
5					
6	Restrições	120	<=	120	
7		60	<=	60	
8		30	<=	50	
9		60	>=	0	
10		30	>=	0	
11					

REFERÊNCIAS

ARENALES, M. et al. **Pesquisa operacional para cursos de engenharia**. São Paulo: Campus, 2007.

EHRLICH, P. J. **Pesquisa operacional** – curso introdutório. São Paulo: Atlas, 1991.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. 8. ed. São Paulo: McGraw Hill, 2006.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

LOESCH C.; HEIN N. **Pesquisa operacional**: fundamentos e modelos. São Paulo: Saraiva, 2009.

TAHA, H. A. **Pesquisa operacional**. 8. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.