



kroton
paixão por educar

GRADUAÇÃO PRESENCIAL
1º semestre- 2017

Cálculo Numérico
Eng^a Elétrica/ Eng^a Produção- 5º
semestre

Prof^o. Ms. Cristiano Malheiro

cmalheiro@aedu.com

<http://cristiano1m.wix.com/aulas>

1



Aula 2

Critérios de Avaliação

1. Avaliações (ambiente online):

B1 – peso 4- 1º bimestre:

- 10 pontos (avaliações e atividades das unidades 1 e 2- online)

B2 – peso 6 – 2º bimestre:

- 3 pontos (**Presencial**: Listas de Exercícios- aula/ casa)
- 7 pontos (Avaliação Oficial Presencial **30/05/2017*****).

SUB – toda a matéria (até o momento- online):

- 10 pontos (avaliação prevista para **19/06/2017*****).

*****Aguardando a elaboração!!!**



Aula 2

CrITÉrios de Avaliação

Quadro 1: Composição da Nota da Disciplina

	Bimestre	Atividade	Peso no Bimestre	Peso no Semestre
Nota	B1	Todas as atividades e avaliações das unidades 1 e 2	100%	40%
	B2	Avaliação Oficial Presencial	70%	60%
		Nota do professor para atividades práticas	30%	

Fonte: Dados institucionais

Quadro 2: Composição da Frequência da Disciplina

Frequência	A frequência da DI Blended será calculada com base nos encontros. Os discentes que não obtiverem frequência mínima de 75% (setenta e cinco por cento) serão considerados reprovados na disciplina.
------------	--

Fonte: Dados institucionais

3



Aula 2

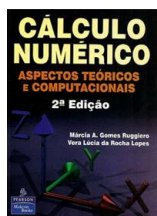
Bibliografia Básica Padrão (Definitivo)

Cálculo Numérico

1. SANTOS, João C. **Cálculo Numérico**. AVA. Ambiente Virtual de Aprendizagem.

João Carlos dos Santos
Gabriela Faria Barcelos Giblin

2. RUGGIERO, Márcia A. G. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2ª edição. São Paulo: Pearson- Prentice Hall, 2012.
Na nossa biblioteca: 30 exemplares- 519.4 R871c



4





Aula 2

Representação dos números, aritmética de ponto flutuante e erros em máquinas digitais

2.2 – Sistema de numeração decimal ou base 10.

Nesse caso todos os múltiplos e submúltiplos de um número são escritos com potências de 10.

$$\begin{aligned}\text{Ex1. } 1537 &= (1537)_{10} = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \\ 36,189 &= (36,189)_{10} = 3 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3} \\ 6,032 \times 10^{23} &= (6,032 \times 10^{23})_{10} = 6 \times 10^{23} + 0 \times 10^{22} + 3 \times 10^{21} + 2 \times 10^{20}\end{aligned}$$

2.3 – Sistema de numeração binário ou base 2.

Nesse caso todos os múltiplos e submúltiplos de um número são escritos com potências de 2.

$$\begin{aligned}\text{Ex2. } (10111)_2 &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ (10,1)_2 &= 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1}\end{aligned}$$

Obs. Os computadores digitais operam basicamente com dois tipos de sinais de tensão: Alto e baixo. Matematicamente, pode-se expressar esses valores por 0 (baixo) e 1 (alto).

5



Aula 2

Representação dos números, aritmética de ponto flutuante e erros em máquinas digitais

3 – Conversão de números

3.1 – Conversão de números decimal → binário.

Para convertermos um número decimal para um número binário devemos aplicar um método para a parte inteira (**divisões sucessivas**) e um método para a parte fracionária, se houver (**multiplicações sucessivas**).

$$\text{Ex3. } (23)_{10} \rightarrow (x)_2$$

Usando o método das divisões sucessivas.

$$\begin{array}{r|l} 23 & 2 \\ \hline 11 & 2 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

Leitura

Resposta: $(x)_2 = (10111)_2$

Dividir até que o último quociente seja menor que a base

Portanto, a partir de uma sequência de 0s e de 1s podemos expressar “qualquer” número decimal. Será?

6



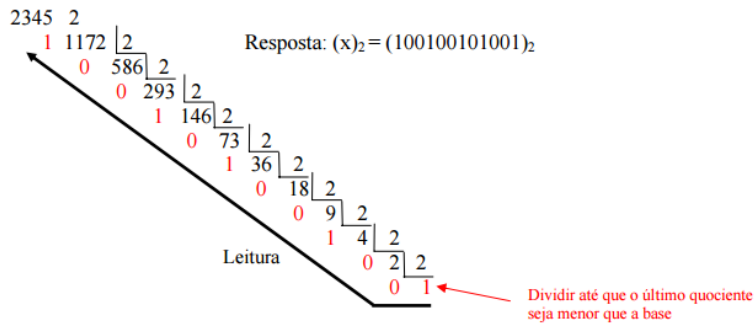


Aula 2

Representação dos números, aritmética de ponto flutuante e erros em máquinas digitais

Ex4. $(2345)_{10} \rightarrow (x)_2$

Usando o método das divisões sucessivas.



7

kroton
paixão por educar

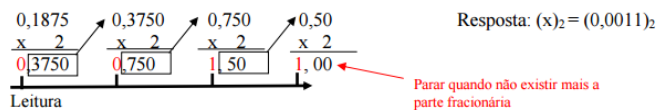


Aula 2

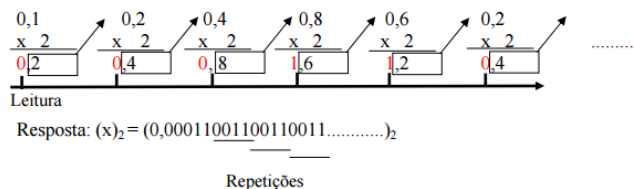
Representação dos números, aritmética de ponto flutuante e erros em máquinas digitais

Para números fracionários utilizamos a regra da multiplicação.

Ex5. $(0,1875)_{10} \rightarrow (x)_2$



Ex6. $(0,1)_{10} \rightarrow (x)_2$



8

kroton
paixão por educar

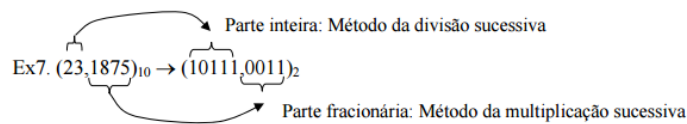


Aula 2

Representação dos números, aritmética de ponto flutuante e erros em máquinas digitais

Nesse caso concluímos que o número $(0,1)_{10}$ NÃO tem representação binária finita !!! → Por mais moderno que seja o computador ele nunca vai saber exatamente o que significa o número $(0,1)_{10}$ pois sua conversão para binário sempre acarretará numa aproximação (truncamento u arredondamento)

Obs. O fato de um número não ter representação finita no sistema binário pode acarretar a ocorrência de erros aparentemente inexplicáveis nos cálculos dos dispositivos eletrônicos.



9



Aula 2

Representação dos números, aritmética de ponto flutuante e erros em máquinas digitais

3.2 – Conversão de números binário → decimal.

Ex8. $(10111)_2 \rightarrow (x)_{10}$

$$(10111)_2 = \underbrace{1x2^4}_{16} + \underbrace{0x2^3}_{0} + \underbrace{1x2^2}_{4} + \underbrace{1x2^1}_{2} + \underbrace{1x2^0}_{1} = 23 = (23)_{10}$$

$\begin{matrix} & & & & d_0 \\ & & & & \uparrow \\ & & & d_1 & \\ & & & \uparrow & \\ & & d_4 & & \end{matrix}$

Ex9. $(110,11)_2 \rightarrow (x)_{10}$

$$(110,11)_2 = \underbrace{1x2^2}_{4} + \underbrace{1x2^1}_{2} + \underbrace{0x2^0}_{0} + \underbrace{1x2^{-1}}_{1/2} + \underbrace{1x2^{-2}}_{1/4} = 6,75 = (6,75)_{10}$$

$\begin{matrix} & & & & d_{-1} \\ & & & & \uparrow \\ & & & d_0 & \\ & & & \uparrow & \\ & & d_2 & & \end{matrix}$

10





Aula 2

1 Questão

 Ainda não respondida

Essa questão Vale 1,00 ponto(s).

Um equipamento dispõe de dois displays: o primeiro mostra números em formato binário, já o segundo, em decimal, havendo uma correspondência entre as representações.

Se o display binário mostra o número 1100011, o decimal mostrará:

Escolha uma:

- ☐ a. 99.
- ☐ b. 31.
- ☐ c. 129.
- ☐ d. 45.
- ☐ e. 69.

11



Aula 2

2 Questão

 Ainda não respondida

Essa questão Vale 1,00 ponto(s).

Um equipamento dispõe de dois displays: o primeiro mostra números em formato binário, já o segundo, em decimal, havendo uma correspondência entre as representações.

Se o display decimal mostra o número 13, o binário mostrará:

Escolha uma:

- ☐ a. 1111.
- ☐ b. 0111.
- ☐ c. 1101.
- ☐ d. 1001.
- ☐ e. 1011.

12





Aula 2

Ainda não respondida

Essa questão Vale 1,00 ponto(s).

Considere as afirmativas a seguir e assinale a alternativa correta:

- a) Sistema decimal: é um sistema numérico com base 10 e que contém os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. É o sistema menos utilizado.
- b) Sistema binário: é um sistema numérico com base 2 e que contém os algarismos 0, 1. É o sistema utilizado pelos computadores.
- c) Outro sistema numérico importante para o estudo computacional é o hexadecimal, ou seja, base = 16. Isso porque também é de potência de 2 (assim como o octal, que é base 8).
- d) O fato de um número ter representação decimal finita não implica uma representação binária também infinita.
- e) Ao convertermos o número decimal $0,78125_{10}$ em binário, encontramos que: $0,78125_{10} = 0,11001_2$.

Escolha uma:

- ☐ a. V, F, F, F, V.
- ☒ b. F, V, V, V, V.
- ☐ c. F, F, V, V, F.
- ☐ d. V, F, V, V, V.
- ☐ e. V, F, F, V, V.

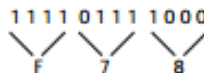
13

kroton
paixão por educar



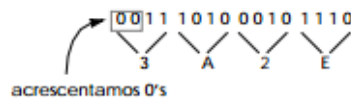
Aula 2

Exemplo 1 : converter 111101111000_2 para hexa



Resultado: $F78_{16}$

Exemplo 2: converter 11101000101110_2 para hexa



Resultado: $3A2E_{16}$

14

kroton
paixão por educar



Aula 2

Exemplo 3: converter $2A7F_{16}$ para decimal.

$$\begin{aligned}
 2 \ A \ 7 \ F &\rightarrow 15 \\
 2 \ A \ 7 \ F &\rightarrow 7 \times 16 \\
 2 \ A \ 7 \ F &\rightarrow 10 \times 256 \\
 2 \ A \ 7 \ F &\rightarrow 2 \times 4096 \\
 2A7F_{16} &= 15 + 7 \times 16 + 10 \times 256 + 2 \times 4096 = 10909_{10} \\
 \text{Resultado: } 10909_{10}
 \end{aligned}$$

Exemplo 4: converter 2223_{10} para hexa

$$\begin{aligned}
 &2223 \div 16 = 138 \text{ resto } 15 \quad d_0 = F \\
 &138 \div 16 = 8 \text{ resto } 10 \quad d_1 = A \\
 &8 \div 16 = 0 \text{ resto } 8 \quad d_2 = 8 \\
 &\text{Resultado: } 8AF_{16}
 \end{aligned}$$

15



Aula 2

Representação dos números, aritmética de ponto flutuante e erros em máquinas digitais

4 – Operações aritméticas entre números binários

A) Adição de binários.

Propriedades:
 $0+0=0$
 $0+1=1$
 $1+0=1$
 $1+1=0$ e vai 1 (para somar ao dígito imediatamente à esquerda)

$$\begin{array}{r}
 \text{Ex10:} \\
 \begin{array}{r}
 1 \\
 1100 \\
 + \quad 111 \\
 \hline
 10011
 \end{array} \\
 \text{Ex11:} \\
 \begin{array}{r}
 11 \\
 1100 \\
 + \quad 1111 \\
 \hline
 11011
 \end{array}
 \end{array}$$

Explicando: Os números binários são base 2, ou seja, há apenas dois algarismos: 0 (zero) ou 1 (um). Na soma de 0 com 0 o total é 0. Quando se soma 1 com 0, o resultado é 1. Quando se soma 1 com 1, o resultado é 2, mas como 2 em binário é 10, o resultado é 0 (zero) e passa-se o outro 1 para a "frente", ou seja, para ser somado com o próximo elemento, conforme assinalado pelo asterisco, como no exemplo acima.

16





Aula 2

Representação dos números, aritmética de ponto flutuante e erros em máquinas digitais

B) Subtração de binários.

Propriedades:
 $0-0=0$
 $0-1=1$ e vai 1 (para subtrair ao dígito imediatamente à esquerda)
 $1-0=1$
 $1-1=0$

Ex12:

```

  1 111
1101110
-   10111
-----
= 1010111

```

Explicando: Quando temos 0 menos 1, precisamos "pedir emprestado" do elemento vizinho. Esse empréstimo vem valendo 2 (dois), pelo fato de ser um número binário. Então, no caso da coluna $0 - 1 = 1$, porque na verdade a operação feita foi $2 - 1 = 1$. Esse processo se repete e o elemento que cedeu o "empréstimo" e valia 1 passa a valer 0. Os asteriscos marcam os elementos que "emprestaram" para seus vizinhos. Perceba, que, logicamente, quando o valor for zero, ele não pode "emprestar" para ninguém, então o "pedido" passa para o próximo elemento e esse zero recebe o valor de 1.

17



Aula 2

Representação dos números, aritmética de ponto flutuante e erros em máquinas digitais

C) Multiplicação de binários

A multiplicação entre binários é similar à realizada com números decimais. A única diferença está no momento de somar os termos resultantes da operação:

Ex13:

```

      1 0 1 1
x   1 0 1 0
-----
      0 0 0 0
+   1 1 0 1 1
+   0 0 0 0
+   1 0 1 1
-----
= 1 1 0 1 1 1 0

```

Ex14:

```

      1 1 1
x   1 1 1
-----
      1 1
+   1 1 1 1 1
+   1 1 1 1
-----
= 1 1 0 0 0 1

```

18





Aula 2

Representação dos números, aritmética de ponto flutuante e erros em máquinas digitais

D) Divisão de Binários

Essa operação também é similar àquela realizada entre números decimais:

Ex15:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 110 \\
 - 10 \\
 \hline
 010 \\
 - 10 \\
 \hline
 00
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 10 \\
 \hline
 11
 \end{array}
 \end{array}$$

19

kroton
paixão por educar



Aula 2

Exercícios:

- Converta os seguintes números binários para hexa:
 - 10011111001
 - 0101010011
 - 111101000101101
 - 110111000100101
- Converta os seguintes números hexa para binário:
 - 5A
 - F81
 - E3C0
 - B976
- Converta os seguintes números decimais para hexa e binário:
 - 267
 - 555
 - 937201
 - 7346352
- Converta os seguintes números hexa para decimal:
 - 1001
 - 222
 - A73E
 - 8B10D

20

kroton
paixão por educar



Aula 2

Exercícios:

5) Some:

- a) $001 + 110$ b) $111110 + 1111$

6) Subtraia:

- a) $1111 + 10$ b) $111110 - 1111$

7) Multiplique:

- a) 111×10 b) 111111×1010

8) Divida:

- a) $1110:10$ b) $1110:100$

21



Aula 2

Aritmética de ponto flutuante

Diálogo aberto

Na seção anterior, vimos que há um método padrão para gerar um número numa base "b" qualquer, mas concentramos nossos estudos nos números dos sistemas decimal e binário.

Nesta seção, você irá aprender sobre aritmética de ponto flutuante. Iremos estudar sobre a representação dos números num sistema computacional e como esta é limitada pela capacidade da máquina, motivo da utilização do truncamento ou arredondamento dos dados.

22





Aula 2



Lembre-se

Alguns desastres que ocorreram são atribuídos a uma equivocada computação numérica, como o fracasso do míssil Patriot, em Dharan, Arábia Saudita, em 25 de fevereiro de 1991. Esse incidente, que resultou em 28 mortes, foi atribuído à má manipulação de erros de arredondamento. Outro caso foi a explosão do foguete Ariane 5, logo após a decolagem em sua viagem inaugural a partir da Guiana Francesa, em 4 de junho de 1996. Esse desastre acabou por ser a consequência de um estouro de memória (*overflow*). Os textos completos sobre os casos podem ser lidos em <<http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters>>. Acesso em: 13 jul. 2015.

23



Aula 2

Sistemas de números no computador

A quantidade de números reais existentes é infinita, e entre qualquer faixa de números temos outros infinitos números – podemos representar números infinitamente pequenos. Os computadores, por sua vez, são limitados, ou seja, só podem representar números de tamanho finito, elementos finitos, células e registradores de tamanho finito. O fato de os computadores só representarem números de tamanho finito acarreta um problema de precisão, e podem ocorrer erros tanto para indicar números, quanto para obter o resultado de operações aritméticas. É por problemas como esse que existem o ***overflow*** e o ***underflow***. Para melhor compreensão, suponha que um processador tenha capacidade para representar valores binários de 32 bits e que efetue uma multiplicação cujo resultado retorne um número que ocupe mais espaço que o disponível. Essa ocorrência é conhecida como estouro da representação ou *overflow*.

24





Aula 2



Vocabulário

Underflow: quando ocorre um resultado com valor abaixo do menor valor representável por uma específica quantidade de bits disponível numa dada máquina.

Overflow: é o estouro da representação, isto é, quando há a necessidade de armazenar uma quantidade maior de bits do que o espaço representável disponibilizado pelo sistema de computação.

Bit: (simplificação para dígito binário, "*Binary digit*" em inglês) é a menor unidade de informação que pode ser armazenada ou transmitida e que pode assumir somente dois valores: 0 ou 1, verdadeiro ou falso e assim por diante.

25



Aula 2

Num sistema computacional, os valores reais são armazenados em notação científica, que é aquela que permite escrever com menos algarismos números muito pequenos (com muitos zeros depois da vírgula) ou números muito grandes. Considere os exemplos a seguir. O número 0,0000005 é muito pequeno, mas possui muitos dígitos. Em notação científica, é representado por 5×10^{-7} e, em computação, por 5E-7, sendo que E é o indicador de que há o expoente -7. Observe que essa notação permite que o número seja "representado" corretamente com uma quantidade menor de algarismos (dígitos). A notação científica, como é conhecida em matemática, é chamada em computação de representação em ponto flutuante. Agora note que o número 5531222341112123 pode ser representado por $5,53 \times 10^{15}$ ou por 5,53E15 em ponto flutuante. Vamos aprender agora como os números são representados num computador.

26





Aula 2

Dado um número inteiro $n \neq 0$, ele possui a seguinte representação:

$$n = \pm(n_k n_{k+1} \dots n_1 n_0) = \pm(n_0 b^0 + n_1 b^1 + \dots + n_k b^k),$$

em que os $n_i, i=0, -1, \dots, -k$ são inteiros satisfazendo $0 \leq n_i < b$ e $n_{-k} \neq 0$.



Exemplificando

Como o número 1885 é representado na base $b=10$ e armazenado?

$$1885 = 5 \times 10^0 + 8 \times 10^1 + 8 \times 10^2 + 1 \times 10^3$$

E é armazenado como $n_{-3} n_{-2} n_{-1} n_0$.

27



Aula 2

Representação de um número real

Você sabia que a representação de um número real no computador pode ser feita de duas maneiras?

I- Uma delas é a representação em ponto fixo: esse sistema foi usado no passado em muitos computadores. Assim, dado um número real, $x \neq 0$, ele será representado em ponto fixo por:

$$x = \pm \sum_{i=k}^n x_i b^i,$$

em que k e n são inteiros satisfazendo $k < n$ e, usualmente, $k \leq 0$ e $n > 0$ e os x_i são inteiros satisfazendo $0 \leq x_i < b$.

28





Aula 2



Exemplificando

O número 2886,16 é representado na base $b=10$ por:

$$\begin{aligned} 2886,15 &= \sum_{i=-3}^2 x_i b^i \\ &= 2 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} \\ &= 2 \times 1000 + 8 \times 100 + 8 \times 10 + 6 \times 1 + 1 \times 0,1 + 5 \times 0,01 \end{aligned}$$

Assim é armazenado como $x_3x_2x_1x_0x_{-1}x_{-2}$

A representação em ponto flutuante (poderia ser chamada, no Brasil, de vírgula flutuante, pois usamos a vírgula para separar a parte inteira da fracionária) é universalmente utilizada nos dias atuais.

29



Aula 2

II- Representação em ponto flutuante

Essa é a representação mais flexível, portanto é mais utilizada nos dias de hoje. Um número real, $x \neq 0$, pode ser representado em ponto flutuante por:

$$x = \pm (0.d_1d_2\dots d_t) \times b^E,$$

em que:

b = a base em que o computador opera;

t = o número de dígitos na mantissa; $0 \leq d_j \leq (b-1)$, $j=1, \dots, t$;

E = o expoente no intervalo $[m, M]$. Se $d_1 \neq 0$, diz-se que o sistema é normalizado (SPERANDIO; MENDES; SILVA, 2003).

30





Aula 2



Exemplificando

Segue a representação de alguns números na base $b = 10$, em um ponto flutuante na forma normalizada.

$$\text{i) } 0,65 = (6 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}) \times 10^0 = 0,65 \times 10^0$$

$$\text{ii) } -4,765 = -(4 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4}) \times 10^1 = -0,4765 \times 10^1$$

$$\text{iii) } 0,0145 = (1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}) \times 10^{-1} = 0,145 \times 10^{-1}$$

$$\text{iv) } 4321,6 = (4 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 1 \times 10^{-4} + 6 \times 10^{-5}) \times 10^4 = 0,43216 \times 10^4$$

$$\text{v) } 0,0004 = (4 \times 10^{-1}) \times 10^{-3} = 0,4 \times 10^{-3}$$

31



Aula 2

Exercícios:

9) Represente os seguintes números na base $b=10$, em um ponto flutuante na forma normalizada.

a) 0,075

b) 1,15

c) 456,2

d) 1,335

32





kroton
paixão por educar

Bibliografia desta aula:

1. -PEA Cálculo Numérico– Anhanguera Educacional.
2. Notas de Aula- UNIVAP
http://www1.univap.br/spilling/CN/CN_Cap1.pdf
3. <http://www.ic.unicamp.br/~ducati/mc404/Apostila/Cap2.pdf>
4. Livro do AVA – Disciplina Cálculo Numérico.

33

kroton
paixão por educar

