



GRADUAÇÃO PRESENCIAL
2º semestre- 2018

Cálculo Numérico
Eng^a Elétrica- 4º e 6º semestre
Eng^a Produção- 4º semestre

Prof.º. Ms. Cristiano Malheiro
cmalheiro@anhanguera.com
<http://cristiano1m.wix.com/aulas>

1



Aula 9

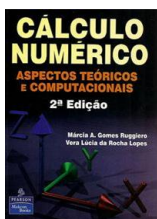
Cálculo Numérico

Bibliografia Básica Padrão (Definitivo)

1. SANTOS, João C. **Cálculo Numérico**. AVA.
Ambiente Virtual de Aprendizagem.

João Carlos dos Santos
Gabriela Faria Barcelos Giblin

2. RUGGIERO, Márcia A. G. **Cálculo Numérico:
Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2ª edição. São
Paulo: Pearson- Prentice Hall, 2012.
Na nossa biblioteca: 30 exemplares- 519.4 R871c



2



Aula 9

Análise de Erros - Parte I

Diálogo aberto

Na seção anterior, você aprendeu sobre aritmética de ponto flutuante e sobre a representação dos números num sistema computacional, sendo esta última limitada pela capacidade da máquina. Nesta seção, vamos estudar sobre análise de erros, pois a noção de erros está presente em todos os campos do cálculo numérico.

Sabemos que os dados nem sempre são exatos e que as operações realizadas sobre esses valores não exatos propagam esses erros a seus resultados. Assim, os métodos numéricos, métodos esses aproximados, buscam minimizar esses erros, procurando resultados que se aproximem dos valores exatos.

Nesta seção, analisaremos os erros que ocorrem durante as fases de modelagem e resolução e também sobre erros de arredondamento e erros de truncamento.

3



Aula 9



Refleta

O cálculo numérico faz parte da análise numérica, no sentido amplo, que comumente está preocupada com a quantificação dos erros cometidos nas diversas etapas de aproximação, tais como arredondamento e truncamento, e também com questões mais refinadas no escopo dos processos de aproximação.

4





Aula 9

Erros devido ao Armazenamento - Erros de Arredondamento e Truncamento



Assimile

Os erros de arredondamento podem surgir de duas fontes distintas: no processo de conversão de base e na representação finita de dígitos que as máquinas utilizam (SPERANDIO; MENDES; SILVA, 2003, p. 7).

5



Aula 9



Refleta

Vimos, na seção anterior, que o número decimal 0,6 é representado em binário por 0,10011001... e isso mostra que o valor em decimal é armazenado de forma aproximada, ou seja, não tem representação exata na base binária. Dessa forma, pode-se concluir que nem todos os números reais têm representação no sistema binário, sendo necessário arredondar ou truncar para o número mais próximo da máquina.

Erro de arredondamento: para fazer o registro de um valor aproximado, utilizamos a seguinte regra:

- 1) Somamos meia unidade a última casa decimal a conservar.
- 2) Desprezamos as demais casas.

6





Aula 9



Refleta

A melhor aproximação para $x_1 = 2,142857$ seria 2,142 ou 2,143?

Efetuamos os cálculos $|2,142 - x_1| = 0,000857$ e $|2,143 - x_1| = 0,000143$. Logo, 2,143 representa a melhor aproximação para $x_1 = 2,142857$ usando 4 dígitos significativos.

7



Aula 9

Erros de truncamento: são utilizados em processos muito grandes para o cálculo de um valor, razão pela qual são truncados. Esses processos infinitos são utilizados, por exemplo, em exponencial, logaritmos, funções trigonométricas.

No truncamento, os dígitos que excedem o limite da mantissa são desprezados. Por exemplo, seja $x = 234,57$ representado com $t = 4$, logo $x = 0,2345 \times 10^3$, sendo que 0,07 foi desprezado no truncamento.

Segundo Ruggiero e Lopes (1996, p. 15), o uso de arredondamento, embora apresente menores erros, acarreta um tempo maior de execução, razão pela qual o truncamento é mais utilizado.

8





Aula 9



Exemplificando

Dar a representação dos números a seguir num sistema de aritmética de ponto flutuante de três dígitos para $\beta = 10$, $m = -4$ e $M = 4$.

X	Representação obtida por arredondamento	Representação obtida por truncamento
1.25	$0,125 \times 10$	$0,125 \times 10$
10.053	$0,101 \times 10^2$	$0,100 \times 10^2$
-238.15	$-0,238 \times 10^3$	$-0,238 \times 10^3$
2.71828...	$0,272 \times 10$	$0,271 \times 10$
0.000007	(expoente menor que -4)	=
718235.82	(expoente maior que 4)	=

Fonte: Ruggiero e Lopes (1996, p. 15).

9



Aula 9



Exemplificando

Considerar base 10 e 3 dígitos significativos para efetuar as operações indicadas.

i) $(11,4 + 3,18) + 5,05$ e $11,4 + (3,18 + 5,05)$

ii) $(3,18 \cdot 11,4)/5,05$ e $(3,18/5,05) \cdot 11,4$

iii) $3,18 \cdot (5,05 + 11,4)$ e $3,18 \cdot 5,05 + 3,18 \cdot 11,4$

10





Aula 9

Para cada item, fazendo o arredondamento após cada uma das operações efetuadas, segue que:

$$\text{i) } (11,4 + 3,18) + 5,05 = 14,6 + 5,05 = 19,7$$

$$\text{ao passo que no outro cálculo: } 11,4 + (3,18 + 5,05) = 11,4 + 8,23 = 19,6.$$

$$\text{ii) } (3,18 \cdot 11,4)/5,05 = 36,3/5,05 = 7,19$$

$$\text{e no outro cálculo: } (3,18/5,05) \cdot 11,4 = 0,630 \cdot 11,4 = 7,18.$$

11



Aula 9

Exercício 1. (Entrega Lista 5) Considere uma máquina cujo sistema de representação de números é definido por base 10, 3 dígitos na mantissa ($t=3$), e expoentes no intervalo $[-1,1]$. Encontre o valor máximo, mínimo e a cardinalidade.

Exercício 2. Dar a representação dos números a seguir num sistema de aritmética de ponto flutuante de quatro dígitos para $b=10$, $m=-3$ e $M=3$ considerando arredondamento e depois truncamento

- a) 1.223
- b) 20054,82398
- c) -240,1345
- d) 0,0000045
- e) $5,37894 + (9,6582 - 1,2)$
- f) $(10,45672 + 1,65892) - 0,001$

12





Aula 9

iii) $3,18 \cdot (5,05 + 11,4) = 3,18 \cdot 16,5 = 52,3$

ao passo que no outro cálculo: $3,18 \cdot 5,05 + 3,18 \cdot 11,4 = 16,1 + 36,3 = 52,4$.

Franco (2006, p. 47) faz uma importante observação a respeito dos erros ocorridos:



[...] erros consideráveis podem ocorrer durante a execução de um algoritmo. Isso se deve ao fato de que existem limitações da máquina e também que os erros de arredondamento são introduzidos a cada operação efetuada. Em consequência, podemos obter resultados diferentes mesmo utilizando métodos numéricos matematicamente equivalentes. Assim, devemos ser capazes de conseguir desenvolver um algoritmo tal que os efeitos da aritmética discreta do computador permaneçam inofensivos quando um grande número de operações são executadas.

13



Aula 9

Erros absoluto e relativo

Erro absoluto: diferença entre o valor exato de um número x e seu valor aproximado $\bar{x}$ obtido a partir de um procedimento numérico.

$$EA_x = |x - \bar{x}|$$

Apenas $\bar{x}$ é conhecido, o que fazemos é escolher um limitante superior ou fazer uma estimativa para o módulo do erro absoluto. Isso permitirá que, mesmo não conhecendo o erro, saibamos que ele está entre dois valores conhecidos.

14



Aula 9



Exemplificando

- 1) Sabendo-se que $\pi \in (3,14; 3,15)$, tomaremos para π um valor dentro desse intervalo e teremos, então, $|E_{ax}| = |\pi - \bar{\pi}| < 0,01$.
- 2) Se considerarmos o número $\bar{x} = 1241,9$ de forma que $|EAx| < 0,1$, temos $x \in (1241,8; 1242)$
- 3) Se $\bar{y} = 1,3$ de forma que $|EAy| < 0,1$ podemos dizer que $y \in (1,2; 1,4)$.

15



Aula 9

Os limitantes superiores para os erros absolutos nos exemplos do número 1 e 2 são os mesmos.

Podemos afirmar que os valores de x e y foram representados com a mesma precisão?

O erro absoluto, portanto, não é suficiente para descrever a precisão de um cálculo, pois depende da ordem de grandeza dos números trabalhados. Assim, o conceito de erro relativo é mais utilizado.

Por isso, é importante compararmos a ordem de grandeza dos números x e y . Assim, vamos perceber que um resultado é mais preciso que o outro, isso porque a ordem de grandeza de x é maior que a ordem de grandeza de y .

Erro relativo: erro absoluto dividido pelo valor aproximado.

$$EA_r = \frac{|EA_x|}{|\bar{x}|} = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|}$$

16





Aula 9



Exemplificando

Se $\alpha = 3876,373$ e só desejamos a parte inteira α' , o erro absoluto será:

$$\Delta\alpha = |\alpha - \alpha'| = 0,373.$$

Se fizermos o mesmo com o número $\beta = 1,373$, teremos:

$$\Delta\beta = |\beta - \beta'| = 0,373$$

Obviamente, o efeito de aproximação de β é muito maior do que em α , mas o erro absoluto é o mesmo nos dois casos. O erro relativo, entretanto, pode traduzir perfeitamente esse fato, pois:

$$\delta\alpha = 0,373 / 3876 \cong 0,000096$$

$$\delta\beta = 0,373 / 1 = 0,373$$

Disponível em: <<http://www.inf.ufpr.br/aurora/disciplinas/numerico/apostila.pdf>>. Acesso em: 13 jul. 2015.

Frequentemente, o erro relativo é expresso também como **erro percentual**, chamado taxa de erro. Para isso, basta multiplicar o erro relativo por 100: erro percentual = erro relativo $\times$ 100.

17



Aula 9

$$\text{Erro percentual} = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|} \cdot 100$$

18





Aula 9

Considere o sistema $F(10,3,5,5)$. Efetue as operações indicadas:

$(1,386-0,987) + 7,6485$ e $1,386 - (0,987 -7,6485)$.

19



Bibliografia desta aula:

1. -PEA Cálculo Numérico–
Anhanguera Educacional.
2. Livro do AVA – Disciplina Cálculo
Numérico.

20

