



kroton
paixão por educar

GRADUAÇÃO PRESENCIAL
2º semestre- 2017

**Pesquisa Operacional-
Simulação
Eng^a de Produção
8º semestre**

Profº. Ms. Cristiano Malheiro

cmalheiro@aedu.com

<http://cristianoim.wix.com/aulas>
<http://avaeduc.com.br>

1



Aula 6

Critérios de Avaliação

1. Avaliações:

B1 – peso 4- 1º bimestre:

- 3 pontos (laboratórios, participação e atividades)
- 7 pontos (avaliação confirmada para **05/10/2017**).

B2 – peso 6 – 2º bimestre:

- 3 pontos (laboratórios/ projetos, participação e atividades)
- 7 pontos (avaliação confirmada para **30/11/2017**).

SUB – toda a matéria (Substitui a menor nota):

- 10 pontos (avaliação prevista para **07 ou 14/12/2017**).

*****Datas de acordo com calendário acadêmico!!!**



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

- Soma zero;
- Equilíbrio de Nash;
- Estratégias mistas;
- Dominância;
- Implementação no Solver.

3



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

Teoria dos Jogos:

Formulada por Von Neumann (Prêmio Nobel) e Morgenstern em 1935.

Realiza a análise dos problemas de decisão em situações nas quais **existem conflitos**. (2 jogadores, pessoas, grupos).

Exemplos:

- Programação das TVs; Estratégias de políticos; operações de guerras entre exércitos inimigos.
- Mas **não se deve considerar jogos de azar e de habilidades.**

4





Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

JOGOS DE SOMA ZERO

A cada par de alternativas há um valor de pagamento (payoff) expresso em uma matriz p_{ij} .

- O que um jogador ganha **o outro perde!**

Matriz P_{ij} :

$$\begin{array}{c} \text{Jogador 1} \end{array} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{Jogador 2} \end{array}$$

5

kroton
paixão por educar



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

JOGO PAR OU ÍMPAR

Supondo que o Garoto 1 escolha PAR, têm-se:

Nº. De dedos	Garoto 2: (2,4)	Garoto 2: (1,3,5)
Garoto 1: (2,4)	[G,D]	[D,G]
Garoto 2: (1,3,5)	[D,G]	[G,D]

Determina quem ganha e perde. Adaptando para uma matriz p_{ij} :

Nº. De dedos	Garoto 2: (2,4)	Garoto 2: (1,3,5)
Garoto 1: (2,4)	1	-1
Garoto 2: (1,3,5)	-1	1

6

kroton
paixão por educar



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

PROBLEMAS DETERMINÍSTICOS

Estratégia Pura (não associada a probabilidade)

O encontro de duas **estratégias dominantes** correspondem a um ponto de **sela**.

Em jogos de soma zero, o Equilíbrio de Nash é alcançado por um ponto de sela.

Maxmin= Minmax= ponto de sela= v= valor do jogo

7

kroton
paixão por educar



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

PROBLEMAS DETERMINÍSTICOS

Estratégia Pura (não associada a probabilidade)

O encontro de duas **estratégias dominantes** (não pode só pensar em 1 jogador apenas- as estratégias dos 2 jogadores como a melhor possível) correspondem a um ponto de **sela**.

Em jogos de soma zero, o **Equilíbrio de Nash** é alcançado por um ponto de sela.

Maxmin= Minmax= ponto de sela= v (matriz de payback)= valor do jogo

Maior lucro dentro dos menores= Menor prejuízo do outro jogador

8

kroton
paixão por educar



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

PROBLEMAS DETERMINÍSTICOS

Estratégia Pura (não associada a probabilidade)

Maximizar o ganho mínimo do jogador 1:

Jogador 1=Maxmin: Maior dentre os menores

	Jogador 2 (minmax)			Menores
	-3	10	5	
Jogador 1 (maxmin)	5	-1	-2	
	6	8	9	
	-4	7	6	
Maiores				

9

kroton
paixão por educar



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

PROBLEMAS DETERMINÍSTICOS

Maximizar o ganho mínimo do jogador 1:

Jogador 1=Maxmin: Maior dentre os menores

Minimizar a perda máxima para o jogador 2:

Jogador 2= Minmax: Menor dentre os maiores

	Jogador 2 (minmax)			Menores
	-3	10	5	-3
Jogador 1 (maxmin)	5	-1	-2	-2
	6	8	9	6
	-4	7	6	-4
Maiores				

10

kroton
paixão por educar



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

PROBLEMAS DETERMINÍSTICOS

Maximizar o ganho mínimo do jogador 1:

Jogador 1=Maxmin: Maior dentre os menores

Minimizar a perda máxima para o jogador 2:

Jogador 2= Minmax: Menor dentre os maiores

		Jogador 2 (minmax)			Menores
		-3	10	5	-3
		5	-1	-2	-2
Jogador 1 (maxmin)		6	8	9	6
		-4	7	6	-4
		6	10	9	
Maiores					

11

kroton
pensando por educar



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

DOMINÂNCIA (uma estratégia pode dominar a outra)

1. Se todo valor da linha i for maior que da linha h (elimina)
2. Se todo valor da coluna j for menor que da coluna k (elimina)

→	6	12	13
	8	6	5
→	4	10	10
	8	8	9
	10	8	9

12

kroton
pensando por educar



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

DOMINÂNCIA (uma estratégia pode dominar a outra)

1. Se todo valor da linha i for maior que da linha h (elimina)
2. Se todo valor da coluna j for menor que da coluna k (elimina)

→	6	12	13
	8	6	5
→	4	10	10
	8	8	9
	10	8	9

13



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

DOMINÂNCIA (uma estratégia pode dominar a outra)

1. Se todo valor da linha i for maior que da linha h (elimina)
2. Se todo valor da coluna j for menor que da coluna k (elimina)

	6	12	13
→	8	6	5
	4	10	10
	8	8	9
→	10	8	9

14



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

DOMINÂNCIA (uma estratégia pode dominar a outra)

1. Se todo valor da linha i for maior que da linha h (elimina)
2. Se todo valor da coluna j for menor que da coluna k (elimina)

	6	12	13
→	8	6	5
	4	10	10
	8	8	9
→	10	8	9

15


 kroton
 paixão por educar


Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

DOMINÂNCIA (uma estratégia pode dominar a outra)

1. Se todo valor da linha i for maior que da linha h (elimina)
2. Se todo valor da coluna j for menor que da coluna k (elimina)

	6	12	13
	8	6	5
	4	10	10
→	8	8	9
→	10	8	9

16


 kroton
 paixão por educar



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

DOMINÂNCIA (uma estratégia pode dominar a outra)

- 1. Se todo valor da linha i for maior que da linha h (elimina)
- 2. Se todo valor da coluna j for menor que da coluna k (elimina)

	6	12	13
	8	6	5
	4	10	10
→	8	8	9
→	10	8	9

17



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

DOMINÂNCIA (uma estratégia pode dominar a outra)

- 1. Se todo valor da linha i for maior que da linha h (elimina)
- 2. Se todo valor da coluna j for menor que da coluna k (elimina)

	6	12	13		
	8	6	5		
	4	10	10		
→	8	8	9		
→	10	8	9		

	6	12	13
	6	12	13
	10	8	9

18





Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

DOMINÂNCIA (uma estratégia pode dominar a outra)

- 1. Se todo valor da linha i for maior que da linha h (elimina)
- 2. Se todo valor da coluna j for menor que da coluna k (elimina)

	6	12	13	
	8	6	5	6
	4	10	10	12
→	8	8	9	13
→	10	8	9	10

19



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

DOMINÂNCIA (uma estratégia pode dominar a outra)

- 1. Se todo valor da linha i for maior que da linha h (elimina)
- 2. Se todo valor da coluna j for menor que da coluna k (elimina)

	6	12	13		
	8	6	5	6	12
	4	10	10	10	8
→	8	8	9	13	.
→	10	8	9	10	8

20





Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

DOMINÂNCIA (uma estratégia pode dominar a outra)

Nova situação

		Jogador 2				Menores J1
		3	2	-1	-2	
Jogador 1	-1	1	4	-3		
	1	-4	-2	-1		
	2	-1	1	1		

Maiores J2

21



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

DOMINÂNCIA (uma estratégia pode dominar a outra)

Nova situação

		Jogador 2				Menores J1
		3	2	-1	-2	-2
Jogador 1	-1	1	4	-3		-3
	1	-4	-2	-1		-4
	2	-1	1	1		-1

Maiores J2 3 2 4 1

Este problema não possui ponto de sela.
O problema não é estável!

22





Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

Antes, investigar a possibilidade de reduzir linhas e/ ou colunas na matriz p_{ij} do problema:

		Jogador 2			
		3	2	-1	-2
Jogador 1		-1	1	4	-3
		1	-4	-2	-1
		2	-1	1	1

25



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

Antes, investigar a possibilidade de reduzir linhas e/ ou colunas na matriz p_{ij} do problema:

			Jogador 2			
			3	2	-1	-2
Jogador 1			-1	1	4	-3
		→	1	-4	-2	-1
		→	2	-1	1	1

26





Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

Antes, investigar a possibilidade de reduzir linhas e/ ou colunas na matriz p_{ij} do problema:

Jogador 2

	3	2	-1	-2
Jogador 1	-1	1	4	-3
	1	-4	-2	-1
	2	-1	1	1

27

kroton
paísão por educar



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

Antes, investigar a possibilidade de reduzir linhas e/ ou colunas na matriz p_{ij} do problema:

		Jogador 2		
	3	2	-1	-2
	-1	1	4	-3
Jogador 1	1	-4	-2	-1
	2	-1	1	1

28

kroton
paísão por educar



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar o equilíbrio de Nash.

Jogador 1

(um é o dual do outro)

Jogador 2

Max $z=v$

$v - \sum_{i=1}^m p_i x_i \leq 0, \forall j$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

$x_i \geq 0 \forall i$

Encontrar ponto
de sela pra eles!!

Probabilidades!!!

Min $z=v$

$v - \sum_{j=1}^n p_j y_j \geq 0, \forall i$

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1$$

$y_j \geq 0 \forall j$

29

kroton
pensando por educar



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

No Solver:

Jogador 1

(um é o dual do outro)

Jogador 2

Max v

Restrições:

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 0$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 0$$

$$-2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Min v

Restrições:

$$-2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 0$$

$$-y_1 - 4y_2 + 3y_3 \geq 0$$

$$y_1 - y_2 - y_3 \geq 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

Matriz obtida:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

30

kroton
pensando por educar



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

Plano Ótimo

$$\text{Matriz obtida: } \begin{array}{ccc} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 = 0,33 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0,67 \end{array}$$

$$y_1 = 0,5 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 0,5$$

31



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

Antes, investigar a possibilidade de reduzir linhas e/ ou colunas na matriz p_{ij} do problema:

↓ Jogador 2 ↓

3	2	-1	-2	
-1	1	4	-3	
1	-4	-2	-1	
2	-1	1	1	

Matriz obtida: $\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}$

32





Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

Antes, investigar a possibilidade de reduzir linhas e/ ou colunas na matriz p_{ij} do problema:

Jogador 2

3	2	-1	-2
-1	1	4	-3
1	-4	-2	-1
2	-1	1	1

Jogador 1

Matriz obtida:

2	-1	-2
1	4	-3
-1	1	1

33

 kroton

 paixão por educar


Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

Antes, investigar a possibilidade de reduzir linhas e/ ou colunas na matriz p_{ij} do problema:

Jogador 2

3	2	-1	-2
-1	1	4	-3
1	-4	-2	-1
2	-1	1	1

Jogador 1

Matriz obtida:

2	-2	.
1	-3	.
-1	1	.

34

 kroton

 paixão por educar



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

Antes, investigar a possibilidade de reduzir linhas e/ ou colunas na matriz p_{ij} do problema:

Jogador 2

Jogador 1

3	2	-1	-2
-1	1	4	-3
1	-4	-2	-1
2	-1	1	1

Matriz obtida:

2	-2	.
-1	1	.
.	.	.

35



Aula 9

Introdução à Teoria de Jogos

No Solver:

Jogador 2

(um é o dual do outro)

Jogador 1

Max v

Restrições:

$2x_1 - x_2 \leq 0$

$-2x_1 + x_2 \leq 0$

$x_1 + x_2 = 1$

Min v

Restrições:

$-2y_1 + 2y_2 \geq 0$

$y_1 - y_2 \geq 0$

$y_1 + y_2 = 1$

Matriz obtida:

2	-2	.
-1	1	.
.	.	.

36





kroton
paixão por educar

Bibliografia desta aula:

1. BELFIORI, P.; FÁVERO, L. P. Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia. Editora Campus Elsevier, Edição: 1, 2012;
2. UNIVESP TV.
<https://www.youtube.com/watch?v=xIP19wjHG88>

37



38