



GRADUAÇÃO PRESENCIAL
1º semestre- 2017

Cálculo Numérico
Eng^a Elétrica/ Eng^a Produção- 5º
semestre

Prof^o. Ms. Cristiano Malheiro

cmalheiro@aedu.com

<http://cristiano1m.wix.com/aulas>

1



Aula 9

Critérios de Avaliação

1. Avaliações (ambiente online):

B1 – peso 4- 1º bimestre:

- 10 pontos (avaliações e atividades das unidades 1 e 2- online)

B2 – peso 6 – 2º bimestre:

- 3 pontos (**Presencial**: Listas de Exercícios- aula/ casa)
- 7 pontos (Avaliação Oficial Presencial **30/05/2017*****).

SUB – toda a matéria (até o momento- online):

- 10 pontos (avaliação prevista para **19/06/2017*****).

*****Aguardando a elaboração!!!**

2



Aula 9

ANEXO A

CRONOGRAMA DE ATIVIDADES

Apresentação da disciplina	06/02/2017	
Disponibilização da Unidade 1	06/02/2017	
Atividades e Avaliações da Unidade 1	06/02/2017	10/04/2017
Disponibilização da Unidade 2	27/02/2017	
Atividades e Avaliações da Unidade 2	27/02/2017	10/04/2017
Disponibilização de notas da Avaliação B1 no Portal do Aluno	19/04/2017	
Disponibilização da Unidades 3	20/03/2017	
Atividades e Avaliações da Unidade 3	20/03/2017	28/05/2017
Disponibilização da Unidades 4	24/04/2017	
Atividades e Avaliações da Unidade 4	24/04/2017	28/05/2017
Avaliação Oficial Presencial	22/05/2017	27/05/2017
Atividade Discursiva	10/04/2017	28/05/2017
Disponibilização de notas da Avaliação Oficial B2 no Portal do Aluno	30/06/2017	

3



Aula 9

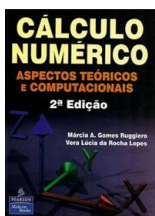
Bibliografia Básica Padrão (Definitivo)

Cálculo Numérico

1. SANTOS, João C. **Cálculo Numérico**. AVA. Ambiente Virtual de Aprendizagem.

João Carlos dos Santos
Gabriela Faria Barcelos Giblin

2. RUGGIERO, Márcia A. G. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2ª edição. São Paulo: Pearson- Prentice Hall, 2012.
Na nossa biblioteca: 30 exemplares- 519.4 R871c



4





Aula 9

avaeduc.com.br/course/view.php?id=54

AVA

Página inicial / Cálculo Numérico

- Orientações gerais
- Livro didático
- Unidade de ensino 1
- Unidade de ensino 2
- Unidade de ensino 3
- Unidade de ensino 4
- Atividade discursiva
- Informações avaliação presencial

ORIENTAÇÕES GERAIS

- Manual da Disciplina
- Acesse aqui o Cronograma de Atividades
- Quadro de Avisos
- Plano de Aula (oculto)

kroton
paixão por educar



Aula 9

Atividade Diagnóstica e Atividade de Aprendizagem

1 Questão

Ainda não respondida

Essa questão Vale 1,00 ponto(s).

Considere uma máquina cuja representação de números é definida por base dez, quatro algarismos na mantissa e expoentes com intervalos entre $[-5,5]$. Ao representar o número 73,758 e calcular os erros absolutos e relativos, podemos afirmar que:

Escolha uma:

- ☐ a. O número $\bar{x} = 0,7376 \cdot 10^2$ é a representação do número 73,758
- ☐ b. O erro absoluto é 0,004
- ☐ c. O erro absoluto e o relativo são iguais.
- ☐ d. A representação por arredondamento correta é $\bar{x} = 0,7375 \cdot 10^2$
- ☐ e. O erro relativo encontrado é 0,002%

Próximo



Aula 9

Unidade 3- Seção 3.1- Motivação

Uma empresa de sucata de ferro, material muito utilizado nas fundições, tem seus valores de comercialização representados na Tabela 3.1:

Tabela 3.1 | Preço de sucata de ferro

x	Toneladas de Ferro	3	5	9
$f(x)$	Preço de Venda [Mil Reais]	120	195	225

Fonte: Elaborada pelo autor.

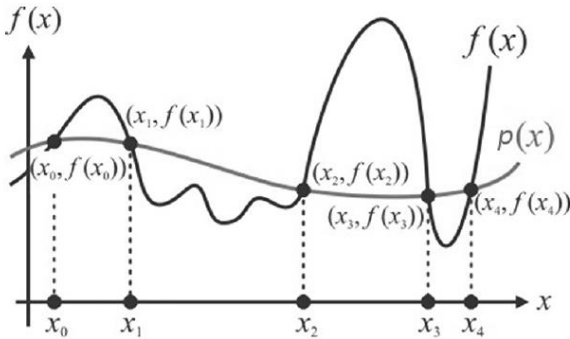
Uma fundição solicita um orçamento para a compra de 7,45 toneladas de sucata de ferro. Para atender à solicitação do cliente, são chamados quatro vendedores: três desses vendedores apresentaram o orçamento, interpolando os valores da Tabela 3.1; o primeiro vendedor, Arnaldo, usou a técnica do polinômio interpolador; o segundo, Bruno, fez uso da forma de Lagrange; e o terceiro, Carlos, aplicou a forma de Newton. O quarto vendedor, Dagoberto, verificou o erro na interpolação pela forma de Newton.



Aula 9

Suponha que tenhamos $(n + 1)$ pares ordenados distintos, $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$, denominados pontos de interpolação, conforme Gráfico 3.1.

Gráfico 3.1 | Pares ordenados distintos



Fonte: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/03/interpolacao-polinomial-parte-1.html>. Acesso em: 24 ago. 2015.





Aula 9

A interpolação aqui apresentada é realizada através da determinação de um polinômio de grau $\leq n$ obtido pelo conhecimento dos pontos de interpolação.

O polinômio interpolador é $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, que é obtido através da resolução do seguinte sistema linear, onde $p(x)$ é uma aproximação para $f(x)$, que é a função desconhecida ou de maior complexidade.

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

9



Aula 9

Unindo os coeficientes e os termos independentes numa única matriz, denominada matriz ampliada, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n & f(x_n) \end{bmatrix}$$

Essa última matriz, a matriz ampliada, é a que escalonamos para obter a solução.

O polinômio interpolador será obtido pela resolução de sistema linear.

Todos os cálculos efetuados nessa seção serão arredondados com duas casas decimais, exceto quando for descrito o critério de arredondamento.

10





Aula 9

Exemplo:

Considerando os pares ordenados $(x, f(x))$ representados na Tabela 3.2, determine o valor de $f(4,39)$ por meio de interpolação polinomial.

Tabela 3.2 | Pares ordenados de $f(x)$

x	4	6	12
$f(x)$	5	1	0

Fonte: Elaborada pelo autor.

11



Aula 9

Solução:

Ao observar a Tabela 3.2, note que podemos denotar $x_0 = 4$, $x_1 = 6$ e $x_2 = 12$. O maior valor de n para esse exemplo é 2 (n = grau do polinômio), portanto o polinômio interpolador será de ordem 2, ou seja, de 2º grau.

Pelo apresentado, o polinômio interpolador é obtido resolvendo um sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = f(x_1) \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = f(x_2) \end{cases}$$

n	x_n	$f(x_n)$
0	4	5
1	6	1
2	12	0

12





Aula 9

Solução:

$$\begin{cases} a_0 + 4a_1 + 4^2 a_2 = 5 \\ a_0 + 6a_1 + 6^2 a_2 x_1^2 = 1 \\ a_0 + 12a_1 + 12^2 a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + 4a_1 + 16a_2 = 5 \\ a_0 + 6a_1 + 36a_2 x_1^2 = 1 \\ a_0 + 12a_1 + 144a_2 = 0 \end{cases}$$

OU

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 12 & 144 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

13



Aula 9

Solução:

Assim, a matriz ampliada para a resolução do sistema por escalonamento fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 & 5 \\ 1 & 6 & 36 & 1 \\ 1 & 12 & 144 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema: $(L_i) = \text{Linha } i$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 & 5 \\ 1 & 6 & 36 & 1 \\ 1 & 12 & 144 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \square \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 & 5 \\ 0 & 2 & 20 & -4 \\ 0 & 8 & 128 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \square \\ \square \\ L_3 - 4L_2 \end{matrix}$$

14





Aula 9

Solução:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 & 5 \\ 0 & 2 & 20 & -4 \\ 0 & 0 & 48 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \square \\ \square \\ L_3/48 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 & 5 \\ 0 & 2 & 20 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0,23 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - 16L_3 \\ L_2 - 20L_3 \\ \square \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1,33 \\ 0 & 2 & 0 & -8,58 \\ 0 & 0 & 1 & 0,23 \end{pmatrix} \begin{matrix} \square \\ L_2/2 \\ \square \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1,33 \\ 0 & 1 & 0 & -4,29 \\ 0 & 0 & 1 & 0,23 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - 4L_2 \\ \square \\ \square \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 18,50 \\ 0 & 1 & 0 & -4,29 \\ 0 & 0 & 1 & 0,23 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18,50 \\ -4,29 \\ 0,23 \end{pmatrix}$$

15



Aula 9

Solução:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18,50 \\ -4,29 \\ 0,23 \end{pmatrix}$$

Como o polinômio interpolador é $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, então:

$$p(x) = 18,50 - 4,29x + 0,23x^2$$

Calculando $p(4,39)$, temos:

$$f(4,39) \cong p(4,39) = 18,50 - 4,29 \cdot 4,39 + 0,23 \cdot 4,39^2$$

$$f(4,39) \cong p(4,39) = 4,10$$

16





Aula 9

Solução:

Lista 6. Resolva para (25/04/2017)

Exercício 1:

Dada a Tabela 3.3, determine o valor de $f(4,39)$ por meio de interpolação polinomial.

Tabela 3.3 | Pares ordenados de $f(x)$

x	1	4	6
$f(x)$	12	5	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

17



Aula 9

Lista 6- Exercício 2

Uma empresa de sucata de ferro, material muito utilizado nas fundições, tem seus valores de comercialização representados na Tabela 3.1:

Tabela 3.1 | Preço de sucata de ferro

x	Toneladas de Ferro	3	5	9
$f(x)$	Preço de Venda [Mil Reais]	120	195	225

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora que você já conheceu uma das técnicas de interpolação polinomial, vamos calcular o valor do orçamento da venda de sucata de ferro solicitada pela empresa de fundição. Coloque-se no lugar do vendedor Arnaldo e tome as rédeas do problema.

18





Aula 9

Solução:

Lembre-se de que, a partir da Tabela 3.1, temos os seguintes pares ordenados $(x, f(x))$ como base para a interpolação:

$(5, 195), (9, 225), (12, 240)$

O primeiro valor, x , representa a quantidade de toneladas de ferro e o segundo, $f(x)$, representa o preço de venda, em milhares.

Determinar o preço para 7,45 toneladas é mesmo que estimar $f(7,45)$ por meio de $p(7,45)$.

19



Aula 9

Solução

Assim:

n	x_n	$f(x_n)$
0	5	195
1	9	225
2	12	240

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = f(x_1) \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = f(x_2) \end{cases}$$

20





Aula 9

Solução

$$\begin{cases} a_0 + 5a_1 + 5^2 a_2 = 195 \\ a_0 + 9a_1 + 9^2 a_2 = 225 \\ a_0 + 12a_1 + 12^2 a_2 = 240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + 5a_1 + 25a_2 = 195 \\ a_0 + 9a_1 + 81a_2 = 225 \\ a_0 + 12a_1 + 144a_2 = 240 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 & 195 \\ 1 & 9 & 81 & 225 \\ 1 & 12 & 144 & 240 \end{pmatrix}$$

21



Aula 9

Solução

Escalonando a matriz, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 141,43 \\ 0 & 1 & 0 & 12,50 \\ 0 & 0 & 1 & -0,36 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 141,43 \\ 12,50 \\ -0,36 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \Rightarrow p(x) = 141,43 + 12,50x - 0,36x^2$$

Considerando $f(x) \cong p(x) = 141,43 + 12,50x - 0,36x^2$, então:

$$f(7,45) \cong p(7,45) = 141,43 + 12,50 \cdot 7,45 - 0,36 \cdot 7,45^2 = 214,57$$

Portanto, a empresa de fundição terá de pagar 214,57 mil reais por 7,45 toneladas de sucata de ferro.

22





Aula 9

Lista 6- Exercício 3

3. Dada a Tabela 3.8, determine o valor aproximado de $f(5)$ por meio de interpolação polinomial.

- a) $f(5) = 2,75$.
- b) $f(5) = 4,73$.
- c) $f(5) = 5,61$.
- d) $f(5) = 1,02$.
- e) $f(5) = 0,80$.

Tabela 3.8 – Pares ordenados de $f(x)$

x	1	4	6	12
$f(x)$	0	1	5	12

Fonte: Elaborada pelo autor.



Aula 9

Resumo da Aula:

O polinômio interpolador é $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ e será obtido resolvendo-se o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$



Bibliografia desta aula:

1. -PEA Cálculo Numérico–
Anhanguera Educacional.
2. Livro do AVA – Disciplina Cálculo
Numérico.

25



26