kroton
paixão por educar

GRADUAÇÃO PRESENCIAL
1° semestre- 2017

Cálculo Numérico
Engª Elétrica/ Engª Produção– 5° semestre

Profº. Ms. Cristiano Malheiro

cmalheiro@aedu.com

http://cristianotm.wix.com/aulas

Aula 5

Critérios de Avaliação

1. Avaliações (ambiente online):

B1 – peso 4- 1º bimestre:
- **10 pontos (avaliações e atividades das unidades 1 e 2- online)**

B2 – peso 6 – 2º bimestre:
- **3 pontos (Presencial: Listas de Exercícios- aula/ casa)**
- **7 pontos (Avaliação Oficial Presencial 30/05/2017***).**

SUB – toda a matéria (até o momento- online):
- **10 pontos (avaliação prevista para 19/06/2017***).**

*****Aguardando a elaboração!!!**

kroton
paixão por educar

Aula 5

Critérios de Avaliação

ANEXO A

CRONOGRAMA DE ATIVIDADES

Apresentação da disciplina	06/02/2017	
Disponibilização da Unidade 1	06/02/2017	
Atividades e Avaliações da Unidade 1	06/02/2017	10/04/2017
Disponibilização da Unidade 2	27/02/2017	
Atividades e Avaliações da Unidade 2	27/02/2017	10/04/2017
Disponibilização de notas da Avalição B1 no Portal do Aluno	19/04/2017	
Disponibilização da Unidades 3	20/03/2017	
Atividades e Avaliações da Unidade 3	20/03/2017	28/05/2017
Disponibilização da Unidades 4	24/04/2017	
Atividades e Avaliações da Unidade 4	24/04/2017	28/05/2017
Avaliação Oficial Presencial	22/05/2017	27/05/2017
Atividade Discursiva	10/04/2017	28/05/2017
Disponibilização de notas da Avalição Oficial B2 no Portal do Aluno	30/06/2017	

kroton
paixão por educar

Aula 5

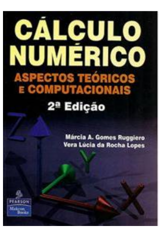
Bibliografia Básica Padrão (Definitivo)

Cálculo Numérico

João Carlos dos Santos
Gabriela Faria Barcelos Gibim

1. SANTOS, João C. **Cálculo Numérico.** AVA. Ambiente Virtual de Aprendizagem.

2. RUGGIERO, Márcia A. G. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.** 2ª edição. São Paulo: Pearson- Prentice Hall, 2012.
Na nossa biblioteca: 30 exemplares- 519.4 R871c



kroton
paixão por educar

Aula 5

avaeduc.com.br/course/view.php?id=54

AVA

Página inicial / Cálculo Numérico

- Orientações gerais
- Livro didático
- Unidade de ensino 1
- Unidade de ensino 2
- Unidade de ensino 3
- Unidade de ensino 4
- Atividade discursiva
- Informações avaliação presencial

ORIENTAÇÕES GERAIS

- Manual da Disciplina
- Acesse aqui o Cronograma de Atividades
- Quadro de Avisos
- Plano de Aula (oculto)

kroton
paixão por educar

Aula 5

Atividade Diagnótsica e Atividade de Aprendizagem

1 Questão

Ainda não respondida | Essa questão Vale 1,00 ponto(s).

Considere uma máquina cuja representação de números é definida por base dez, quatro algarismos na mantissa e expoentes com intervalos entre [-5,5]. Ao representar o número 73,758 e calcular os erros absolutos e relativos, podemos afirmar que:

Escolha uma:

- a. O número $\bar{x} = 0{,}7376 \cdot 10^2$ é a representação do número 73,758
- b. O erro absoluto é 0,004
- c. O erro absoluto e o relativo são iguais.
- d. A representação por arredondamento correta é $\bar{x} = 0{,}7375 \cdot 10^2$
- e. O erro relativo encontrado é 0,002%

Próximo

6

kroton
paixão por educar

Aula 5

Representação de números no sistema F (b, t, m, M).

Para representarmos um sistema de números em ponto flutuante normalizado, na base b, com t dígitos significativos e com limites dos expoentes m e M, usa-se a notação: F (b, t, m, M).

Um número em F (b, t, m, M) será representado por:

$$\pm 0,d_1d_2...d_t \times b^E, \text{ em que } d_1 \neq 0 \text{ e } m \leq E \leq M$$

Exemplificando

Represente no sistema F(10,3,-2,2) os números do exemplo anterior. Nesse sistema, o número será representado por: $\pm 0,d_1d_2d_3 \times 10^E$, em que $-2 \leq E \leq 2$. Assim:

$0,65 = 0,65 \times 10^0$

Aula 5

$-4,765 = -0,4765 \times 10^1$

$0,0145 = 0,145 \times 10^{-1}$

Observe que os números 4321,6 e 0,0004 não podem ser representados no sistema.

Considerando o número $4321,6 = 0,43216 \times 10^4$, sendo o expoente maior que 2, o computador acusa ocorrência de *overflow*.

O número $0,0004 = 0,4 \times 10^{-3}$, sendo o expoente menor que – 2, representa uma situação em que o computador acusa a ocorrência de *underflow*.

Aula 5

Propriedades dos números do sistema de ponto flutuante

i- $p = 0,1 \times b^m$ é o menor número não nulo, em módulo, em F;

ii- $s = 0,(b-1)(b-1)...(b-1) \times b^M$ é o maior número do sistema de ponto flutuante F;

iii- a cardinalidade (número de elementos) de F é:

Número de elementos = $2 \cdot (b-1)b^{t-1}(E_{max} - E_{min} + 1) + 1$

iv- a mantissa está contida no intervalo [0,1; 1]

v- Se $x \in F$, então $-x \in F$.

Aula 5

Exemplificando

Considere F(2, 2,-1,2), com sistema normalizado, ou seja, $d_1 \neq 0$.

Quantos e quais os números são representados por esse computador?

Cardinalidade (número de elementos): $2 \cdot (b-1)b^{t-1}(E_{max} - E_{min} + 1) + 1 = 17$ elementos (8 números positivos, 8 negativos e o zero).

$\pm,10 \times 2^E$ ou $\pm,11 \times 2^E$, sendo $-1 \leq E \leq 2$

Convertendo para decimal, temos:

$0,10 = 1/2$ e $0,11 = 3/4$

Com isso, os únicos números positivos representáveis nesse computador são:

Mantissa: $1/2 \times 2^E$ e $3/4 \times 2^E$ para e=-1,0,1 e 2.

Os números que podem ser representados na reta numérica são: 1/4, 1/2, 1, 2, 3/8, 3/4, 3/2 e 3. Também os números correspondentes negativos e o número zero.

Aula 5

Atenção!

O conjunto dos números de ponto flutuante é discreto e não contínuo como os números reais.

Não temos mais o conceito que entre dois números sempre existe outro.

Exemplo:

Considere a representação binária 0,6 e 0,7.

Aula 5

0,6= 0,100110011001 e 0,7= 0,1011001100110

Se representarmos esses números no sistema de aritmética flutuante F (2,2,-1,2), teremos:

0,6= 0,7= 0,10 x 2^0.

Veja que esse número equivale ao número 0,5 no sistema decimal, ou seja, o número 0,6 e 0,7 serão considerados 0,5 nesse sistema.

Dessa forma, pode-se concluir que nem todos os números reais têm representação no sistema binário, sendo necessário arredondar ou truncar para o número mais próximo da máquina. Vamos estudar mais sobre esse assunto na próxima seção.

Aula 5

Faça você mesmo

Represente o número 1997,16 em ponto fixo.

Sem Medo de Errar

Após o estudo do conteúdo de aritmética de ponto flutuante, vamos resolver a situação-problema apresentada a Carlos?

A nova máquina adquirida possui um sistema de representação de números definido por base decimal, 4 dígitos na mantissa (t=4), e expoentes no intervalo [-5,5]. Os técnicos precisam saber quais são o menor e o maior números, em módulo, representados nessa máquina. Como eles podem resolver esse problema?

Solução

O menor número não nulo, em módulo, de F é dado por:

p= $0{,}1 \times b^m$ logo: sendo b=10 e m= -5 teremos:

15

kroton paixão por educar

Aula 5

$p=0{,}1000 \times 10^{-5} = 10^{-6}$

Para representar o maior número do sistema flutuante F, temos:

$s = 0{,}(b-1)(b-1)...(b-1) \times b^M$, logo:

$s= 0{,}(10-1)(10-1)(10-1)(10-1) \times 10^5$

$s= 0{,}9999 \times 10^5 = 99990$

Atenção!

Nas máquinas digitais, um algarismo binário é denominado bit. Um grupo de 8 bits corresponde a 1 byte. Assim, percebemos que a representação dos números binários num computador é feita com um número finito de bits. A esse tamanho finito de bits é dado o nome de palavra de computador.

kroton paixão por educar

Aula 5

Lembre-se

O tamanho da palavra de computador depende de características internas à arquitetura dele. Em geral, os microcomputadores padrão PC têm tamanho de palavra de 16 a 32 bits. Computadores modernos têm palavras de 64 bits ou mais. Quanto maior é o tamanho da palavra do computador, mais veloz e mais preciso será o computador.

Aula 5

As questões de 2 a 5 referem-se ao seguinte enunciado.

Considere uma máquina cujo sistema de representação de números é definido por base 2, 3 dígitos na mantissa (t=3), e expoentes no intervalo [-1,2] (FRANCO, 2006).

2. Encontre a cardinalidade, ou seja, quantos números são representados por esse computador?

a) 33.

b) 10.

c) 23.

d) 21.

e) 41.

3. Quais são o maior e o menor elementos positivos desse sistema?

Aula 5

4. Quais números podemos representar nesse sistema?

5. Considerando o sistema de ponto flutuante do enunciado, quais dos seguintes números 0,38; 5,3 e 0,15 podem ser representados na base 10?

a) Todos.

b) Apenas o 0,38.

c) Os números 0,38 e 5,3.

d) Os números 0,15 e 5,3.

e) Apenas o número 0,15.

Aula 5

6. Como o número $(0{,}11)_{10} = (0{,}0001110000101000111101011100001010\,0011110........)_2$ será armazenado em uma máquina que opera com apenas 6 dígitos na mantissa, ou seja, que seja capaz de armazenar números no formato m= $\pm$0,d1d2d3d4d5d6 × 10E? (Disponível em: <http://www1.univap.br/spilling/CN/CN_Capt1.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2015).

a) $(0{,}109375)_{10}$.

b) $(0{,}100000)_{10}$.

c) $(0{,}111193)_{10}$.

d) $(0{,}111111)_{10}$.

e) $(0{,}100111)_{10}$.

Aula 5

7. Marque a alternativa correta.

a) O conjunto de números em um sistema de ponto flutuante é discreto, e não contínuo como os números reais.

b) O conjunto de números em um sistema de ponto flutuante é infinito como nos números reais.

c) Sempre que uma operação aritmética produz um número com expoente superior ao expoente máximo, temos um *underflow*.

d) *Overflow* ocorre quando um resultado com valor menor que o menor valor representável por uma específica quantidade de bits está disponível numa máquina dada.

e) O uso do truncamento, embora apresente menores erros, acarreta um tempo maior de execução, razão pela qual o arredondamento é mais utilizado.

Aula 5

Análise de Erros - Parte I

Diálogo aberto

Na seção anterior, você aprendeu sobre aritmética de ponto flutuante e sobre a representação dos números num sistema computacional, sendo esta última limitada pela capacidade da máquina. Nesta seção, vamos estudar sobre análise de erros, pois a noção de erros está presente em todos os campos do cálculo numérico.

Sabemos que os dados nem sempre são exatos e que as operações realizadas sobre esses valores não exatos propagam esses erros a seus resultados. Assim, os métodos numéricos, métodos esses aproximados, buscam minimizar esses erros, procurando resultados que se aproximem dos valores exatos.

Nesta seção, analisaremos os erros que ocorrem durante as fases de modelagem e resolução e também sobre erros de arredondamento e erros de truncamento.

Aula 5

Reflita

O cálculo numérico faz parte da análise numérica, no sentido amplo, que comumente está preocupada com a quantificação dos erros cometidos nas diversas etapas de aproximação, tais como arredondamento e truncamento, e também com questões mais refinadas no escopo dos processos de aproximação.

Aula 5

Erros devido ao Armazenamento - Erros de Arredondamento e Truncamento

Assimile

Os erros de arredondamento podem surgir de duas fontes distintas: no processo de conversão de base e na representação finita de dígitos que as máquinas utilizam (SPERANDIO; MENDES; SILVA, 2003, p. 7).

Aula 5

Reflita

Vimos, na seção anterior, que o número decimal 0,6 é representado em binário por 0,10011001... e isso mostra que o valor em decimal é armazenado de forma aproximada, ou seja, não tem representação exata na base binária. Dessa forma, pode-se concluir que nem todos os números reais têm representação no sistema binário, sendo necessário arredondar ou truncar para o número mais próximo da máquina.

Erro de arredondamento: para fazer o registro de um valor aproximado, utilizamos a seguinte regra:

1) Somamos meia unidade a última casa decimal a conservar.

2) Desprezamos as demais casas.

Aula 5

Reflita

A melhor aproximação para $x_1 = 2{,}142857$ seria 2,142 ou 2,143?

Efetuamos os cálculos $|2{,}142 - x_1| = 0{,}000857$ e $|2{,}143 - x_1| = 0{,}000143$. Logo, 2,143 representa a melhor aproximação para $x_1 = 2{,}142857$ usando 4 dígitos significativos.

Aula 5

Erros de truncamento: são utilizados em processos muitos grandes para o cálculo de um valor, razão pela qual são truncados. Esses processos infinitos são utilizados, por exemplo, em exponencial, logaritmos, funções trigonométricas.

No truncamento, os dígitos que excedem o limite da mantissa são desprezados. Por exemplo, seja x = 234,57 representado com t = 4, logo x = 0,2345 x 10^3, sendo que 0,07 foi desprezado no truncamento.

Segundo Ruggiero e Lopes (1996, p. 15), o uso de arredondamento, embora apresente menores erros, acarreta um tempo maior de execução, razão pela qual o truncamento é mais utilizado.

Aula 5

Exemplificando

Dar a representação dos números a seguir num sistema de aritmética de ponto flutuante de três dígitos para β = 10, m = -4 e M = 4.

X	Representação obtida por arredondamento	Representação obtida por truncamento
1.25	0,125 x 10	0,125 x 10
10.053	0,101 x 10^2	0,100 x 10^2
-238.15	-0,238 x 10^3	-0,238 x 10^3
2.71828...	0,272 x 10	0,271 x 10
0.000007	(expoente menor que -4)	=
718235.82	(expoente maior que 4)	=

Fonte: Ruggiero e Lopes (1996, p. 15).

Aula 5

Exemplificando

Considerar base 10 e 3 dígitos significativos para efetuar as operações indicadas.

i) (11,4 + 3,18) + 5,05 e 11,4 + (3,18 + 5,05)

ii) (3,18 .11,4)/5,05 e (3,18/5,05) · 11,4

iii) 3,18 · (5,05 + 11,4) e 3,18 · 5,05 + 3,18 · 11,4

Aula 5

Para cada item, fazendo o arredondamento após cada uma das operações efetuadas, segue que:

i) (11,4 + 3,18) + 5,05 = 14,6 + 5,05 = 19,7

ao passo que no outro cálculo: 11,4 + (3,18 + 5,05) = 11,4 + 8,23 = 19,6.

ii) (3,18 . 11,4)/5,05 = 36,3/5,05 = 7,19

e no outro cálculo: (3,18/5,05) · 11,4 = 0,630. 11,4 = 7,18.

Aula 5

Exercício 1. (Entrega Lista 5) Considere uma máquina cujo sistema de representação de números é definido por base 10, 3 dígitos na mantissa (t=3), e expoentes no intervalo [-1,1]. Encontre o valor máximo, mínimo e a cardinalidade.

Exercício 2. Dar a representação dos números a seguir num sistema de aritmética de ponto flutuante de quatro dígitos para b=10, m=-3 e M=3 considerando arredondamento e depois truncamento

a) 1.223
b) 20054,82398
c) -240,1345
d) 0,0000045
e) 5,37894+(9,6582- 1,2)
f) (10,45672+ 1,65892)- 0,001

Aula 5

iii) 3,18 · (5,05 + 11,4) = 3,18 · 16,5 = 52,3

ao passo que no outro cálculo: 3,18 . 5,05 + 3,18 . 11,4 = 16,1 + 36,3 = 52,4.

Franco (2006, p. 47) faz uma importante observação a respeito dos erros ocorridos:

> [...] erros consideráveis podem ocorrer durante a execução de um algoritmo. Isso se deve ao fato de que existem limitações da máquina e também que os erros de arredondamento são introduzidos a cada operação efetuada. Em consequência, podemos obter resultados diferentes mesmo utilizando métodos numéricos matematicamente equivalentes.
> Assim, devemos ser capazes de conseguir desenvolver um algoritmo tal que os efeitos da aritmética discreta do computador permaneçam inofensivos quando um grande número de operações são executadas.

Aula 5

Erros absoluto e relativo

Erro absoluto: diferença entre o valor exato de um número x e seu valor aproximado $\bar{x}$ obtido a partir de um procedimento numérico.

$$EA_x = | x - \bar{x} |$$

Apenas $\bar{x}$ é conhecido, o que fazemos é escolher um limitante superior ou fazer uma estimativa para o módulo do erro absoluto. Isso permitirá que, mesmo não conhecendo o erro, saibamos que ele está entre dois valores conhecidos.

Aula 5

Exemplificando

1) Sabendo-se que π ∈ (3,14; 3,15), tomaremos para π um valor dentro desse intervalo e teremos, então, $|E_{ax}| = |\pi - \bar{\pi}| < 0{,}01$.

2) Se considerarmos o número $\bar{x}$ = 1241,9 de forma que $|EAx|$< 0,1, temos x ∈ (1241,8; 1242)

3) Se $\bar{y}$ = 1,3 de forma que $|EAy|$< 0,1 podemos dizer que y ∈ (1,2; 1,4).

Aula 5

Os limitantes superiores para os erros absolutos nos exemplos do número 1 e 2 são os mesmos.

Podemos afirmar que os valores de x e y foram representados com a mesma precisão?

O erro absoluto, portanto, não é suficiente para descrever a precisão de um cálculo, pois depende da ordem de grandeza dos números trabalhados. Assim, o conceito de erro relativo é mais utilizado.

Por isso, é importante compararmos a ordem de grandeza dos números x e y. Assim, vamos perceber que um resultado é mais preciso que o outro, isso porque a ordem de grandeza de x é maior que a ordem de grandeza de y.

Erro relativo: erro absoluto dividido pelo valor aproximado.

$$EA_R = \frac{|EA_x|}{|\bar{x}|} = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|}$$

Aula 5

Exemplificando

Se **α** = 3876,373 e só desejamos a parte inteira **α'**, o erro absoluto será:

Δα = | α − α' | = 0,373.

Se fizermos o mesmo com o número **β** = 1,373, teremos:

Δβ = | β − β' | = 0,373

Obviamente, o efeito de aproximação de **β** é muito maior do que em **α**, mas o erro absoluto é o mesmo nos dois casos. O erro relativo, entretanto, pode traduzir perfeitamente esse fato, pois:

δα = 0,373/ 3876 ≅ 0,000096 **δβ** = 0,373/ 1 = 0,373

Disponível em: <http://www.inf.ufpr.br/aurora/disciplinas/numerico/apostila.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2015.

Frequentemente, o erro relativo é expresso também como **erro percentual**, chamado taxa de erro. Para isso, basta multiplicar o erro relativo por 100: erro percentual = erro relativo × 100.

Aula 5

$$\text{Erro percentual} = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|} \cdot 100$$

Aula 5

Considere o sistema F(10,3,5,5). Efetue as operações indicadas:

(1,386-0,987) + 7,6485 e 1,386 – (0,987 -7,6485).

kroton
paixão por educar

Bibliografia desta aula:

1. -PEA Cálculo Numérico– Anhanguera Educacional.
2. Livro do AVA – Disciplina Cálculo Numérico.

37

kroton
paixão por educar

Anhanguera fama LFG pitágoras UNIASSELVI unic UNIDERP unime UNIRONDON unopar

38